

**1<sup>er</sup> Coloquio del Departamento  
de Matemáticas**

**Teoría de Bifurcaciones**

Luis Aguirre  
Peter Seibert





# Teoría de Bifurcaciones

Luis Aguirre

Peter Seibert

*Departamento de Matemáticas, UAM-I*



Universidad Autónoma Metropolitana



# Contenido

Introducción	vii
Capítulo 1. Ejemplos de bifurcaciones	1
1.1. Bifurcaciones elementales	1
1.2. La forma normal de la bifurcación de Hopf	12
1.3. El teorema de la bifurcación de Hopf	17
Capítulo 2. Persistencia de la inestabilidad y bifurcaciones que surgen equilibrios inestables	23
2.1. Familias continuas de (semi-)grupos de transformaciones. Compacidad asintótica local	23
2.2. Inestabilidad	25
2.3. La Persistencia de la Inestabilidad	25
2.4. Cambio de estabilidad y bifurcación	26
2.5. La bifurcación de Hopf generalizada	29
Capítulo 3. Equiestabilidad y bifurcación	31
3.1. Equiestabilidad y pérdida crítica de la estabilidad	33
3.2. La propiedad CRES y la bifurcación extracrítica	34
3.3. Las familias de atractores no-CRES y las bifurcaciones débilmente críticas	35
3.4. Ejemplos diversos	36
Capítulo 4. Persistencia de la estabilidad asintótica y la bifurcación de Hopf generalizada	45
4.1. Principio de persistencia para la estabilidad asintótica	45
4.2. Bifurcaciones de Hopf generalizadas	46
Capítulo 5. Bifurcaciones que surgen de conjuntos silla	47
5.1. Persistencia de la estructura de silla	47
Apéndice A. Notaciones y algunos conceptos fundamentales.	53
Apéndice. Referencias	55



## Introducción

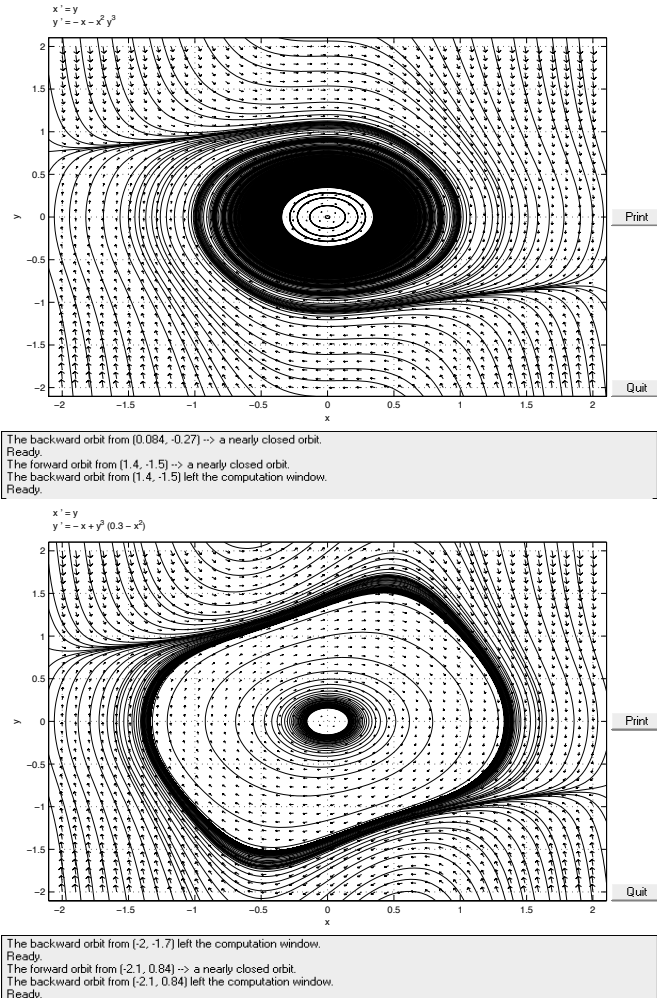
Entre los diversos enfoques existentes en el estudio y desarrollo de la teoría de bifurcaciones, el nuestro está planteado en particular, en el problema de la conexión que existe entre dos tipos de fenómenos que ocurren en familias de sistemas dinámicos o semidinámicos que dependen de un parámetro  $\lambda$ , con respecto a un punto de equilibrio o un conjunto invariante compacto  $M$  independiente de  $\lambda$ :

1. *El cambio del comportamiento de la estabilidad* de  $M$  cuando el parámetro  $\lambda$  entra o sale de un cierto valor crítico  $\lambda_0$ ;
2. *La bifurcación* de  $M$  en el sentido de que este conjunto se “escinde” en más de un conjunto invariante cuando el parámetro  $\lambda$  entra o sale de un cierto valor  $\lambda_0$ . Esta bifurcación puede ser *extracrítica* (o *ultracrítica*, suponiendo que  $\lambda$  es un parámetro escalar), es decir, surgen conjuntos invariantes compactos  $M_n$  para los valores  $\lambda_n$  de  $\lambda$  tales que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ,  $M_n \cap M = \emptyset$ , y la distancia maximal entre  $M_n$  y  $M$  converge a 0; o esta puede ser *crítica* (también llamada *vertical*) en el sentido de que para  $\lambda = \lambda_0$  existen conjuntos invariantes compactos que se acumulan en  $M$ , mientras que para  $\lambda \neq \lambda_0$ ,  $M$  es aislado de tales conjuntos.

El caso mejor conocido donde un cambio de estabilidad coincide con una bifurcación es la clásica *bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf* [9], [15], (referida, en lo que sigue, simplemente como *bifurcación de Hopf*, de acuerdo con el lenguaje usual). Ahí el cambio de la estabilidad (en el caso típico, de estabilidad asintótica “crítica” a inestabilidad completa “ultracrítica”) está reflejado en un cambio de la estabilidad correspondiente al sistema linealizado { siendo el ejemplo más simple, el dado por la ecuación diferencial ordinaria:  $\dot{x} = x(\lambda - x^2)$  (“pitchfork”) }.

Posteriormente, partiendo del artículo [14] de los cuatro autores italianos, Marchetti, Negrini, Salvadori y Scalia, donde observaron que la ocurrencia de una bifurcación, en general, no necesariamente depende de la parte lineal del sistema, más bien, es una consecuencia del cambio de la estabilidad, independientemente de que esta esté o no reflejada en el espectro de la parte lineal del sistema. Como un ejemplo consideremos

el sistema ([19], ejemplo 4.20(b)):  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x + y^3(\lambda - x^2)$ . Para este, los eigenvalores de la parte lineal son  $\pm i$ , independientes de  $\lambda$  (el cual afecta solamente en la parte no lineal). De cualquier manera, es más fácil probar que para  $\lambda \leq 0$ , el origen es asintóticamente estable, mientras que para  $\lambda > 0$ , es completamente inestable y surgen ciclos límites que se contraen en el origen cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . Ver la Figura 0.1.



**Figure 0.1.** Arriba, para  $\lambda = 0$ ,  $(0, 0)$  es un foco estable. Abajo, para  $\lambda = 0.3$ ,  $(0, 0)$  es un foco inestable. El conjunto que se bifurca es una órbita periódica.



En [14] se probó que si un conjunto  $M$  es asintóticamente estable para  $\lambda = \lambda_0$ , y completamente inestable (repulsor) para valores de  $\lambda$  cercanos a  $\lambda_0$ , entonces “emergen” de  $M$  conjuntos invariantes (además, estos son asintóticamente estables) (“bifurcación extracrítica”).

Este resultado se extendió, en [19], a sistemas semidinámicos sobre espacios métricos, bajo una suposición de compacidad asintótica. {Esta propiedad es compartida por una clase muy amplia de ecuaciones de evolución (ver [7], donde el término usado es *asintóticamente suave*).} Ahí, también fue relajada la hipótesis de inestabilidad completa. En particular, se probó que cualquier transición de estabilidad asintótica a conjunto silla, implica una bifurcación extracrítica, excepto en el caso hipotético donde todas las órbitas exteriores son homoclínicas.

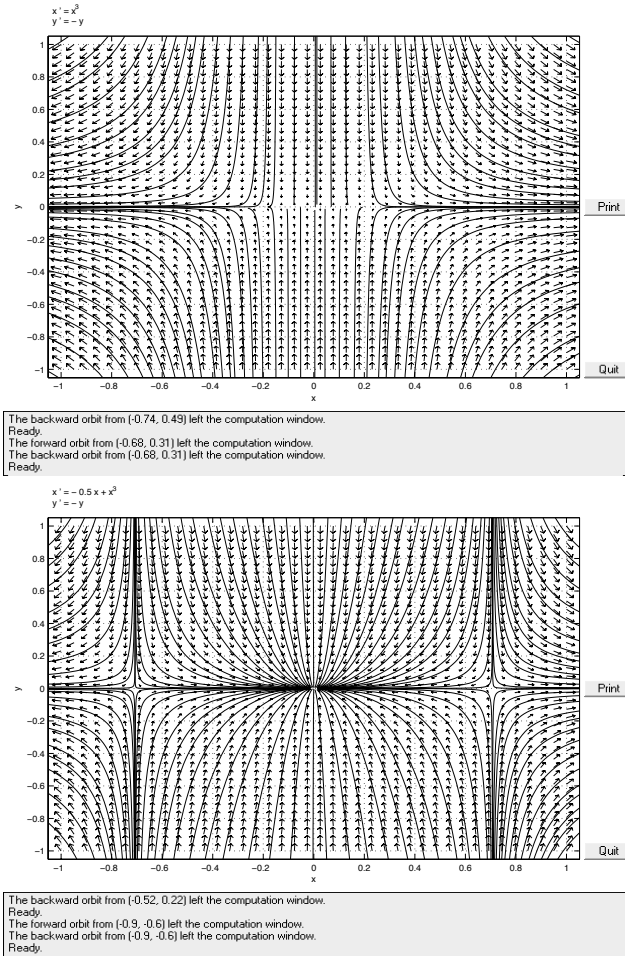
Todos estos resultados, son una consecuencia de un *principio de persistencia de la estabilidad asintótica* que establece que siempre que un sistema involucre un conjunto invariante asintóticamente estable (atractor estable) y se perturbe ligeramente, surge en el sistema perturbado, un conjunto asintóticamente estable arbitrariamente cercano al atractor original (demostrado primero, en un preliminar, pero de forma muy general en [18], después en [23], Teorema 25.3, pero combinado con perturbaciones persistentes e impulsivas, y vuelto a demostrar en [14] y por otros autores).

Un tipo de extensión de la bifurcación de Hopf totalmente diferente, está considerada en [2], [21] y [3]. Aquí, en lugar de relajar la condición de inestabilidad completa para  $\lambda \neq \lambda_0$ , como en el caso anterior, relajamos la hipótesis de estabilidad asintótica para  $\lambda = \lambda_0$ , requiriendo en su lugar que,  $M$  sea inestable, únicamente en el sentido negativo. Para evitar esta doble negación, invertimos la escala de tiempo.

Entonces el problema se convierte en el siguiente: *¿Qué se puede decir acerca de la existencia de bifurcaciones en el caso donde  $M$  es inestable para  $\lambda = \lambda_0$  y (asintóticamente) estable para algunos valores de  $\lambda$  que se acumulan en  $\lambda_0$ ?* (si la estabilidad es o no asintótica, es irrelevante).

Un ejemplo típico de esta situación es el caso de dos sistemas acoplados, uno de los cuales pierde su estabilidad cuando  $\lambda$  alcanza el valor  $\lambda_0$ , mientras que los otros permanecen estables para todos los valores de  $\lambda$ , este es el caso de una transición extracrítica silla-atractor, siendo el prototipo trivial el sistema:  $\dot{x} = -\lambda x + x^3$ ,  $\dot{y} = -y$ . Ver la Figura 0.2.

La razón para la existencia de este tipo de bifurcaciones, se encuentra en lo que llamamos el *principio de persistencia de la inestabilidad*, el cual juega un papel análogo en este contexto que el que juega el principio de la persistencia de la estabilidad asintótica en el caso previo. En términos generales, este principio establece



**Figure 0.2.** Arriba, para  $\lambda = 0$ ,  $(0, 0)$  es un punto silla. Abajo, para  $\lambda = 0.5$ ,  $(0, 0)$  es un nodo estable. El punto que se bifurca es un punto silla.

que si un sistema exhibe un cierto grado de inestabilidad, esta situación no se puede modificar sustancialmente mediante cambios arbitrariamente pequeños en los parámetros del sistema, en cambio, si puede empeorarse.

El uso de esta propiedad de persistencia en la demostración de la existencia de bifurcaciones es menos fácil que en la del caso que tiene que ver con la estabilidad asintótica. En efecto, se puede demostrar,

bajo una condición de compacidad asintótica local para la familia de sistemas bajo consideración y suposiciones moderadas concernientes al espacio, que una transición extracrítica de inestabilidad a estabilidad implica una bifurcación que puede ser crítica o extracrítica.

Un papel central en la demostración, lo juega un argumento análogo al del tipo que se usa en el método topológico de Wazewski. Esta parte de la teoría es la más general y se presenta en el capítulo 2.

En el capítulo 3, bosquejamos un refinamiento del último resultado establecido, introduciendo un concepto de equicontinuidad y sus generalizaciones, en particular, la noción del concepto de ser una familia de atractores conexo relativamente equiestable (CRES) que interviene cuando el parámetro  $\lambda$  tiende al valor crítico  $\lambda_0$ .

El resultado principal en esta dirección es que una ganancia extracrítica de la estabilidad, junto con la propiedad CRES, da una bifurcación extracrítica mientras que la ausencia de la propiedad CRES implica una bifurcación crítica, posiblemente en una forma débil, en el sentido que los conjuntos invariantes que se acumulan en  $M$ , pueden tomar la forma de lazos homoclínicos.

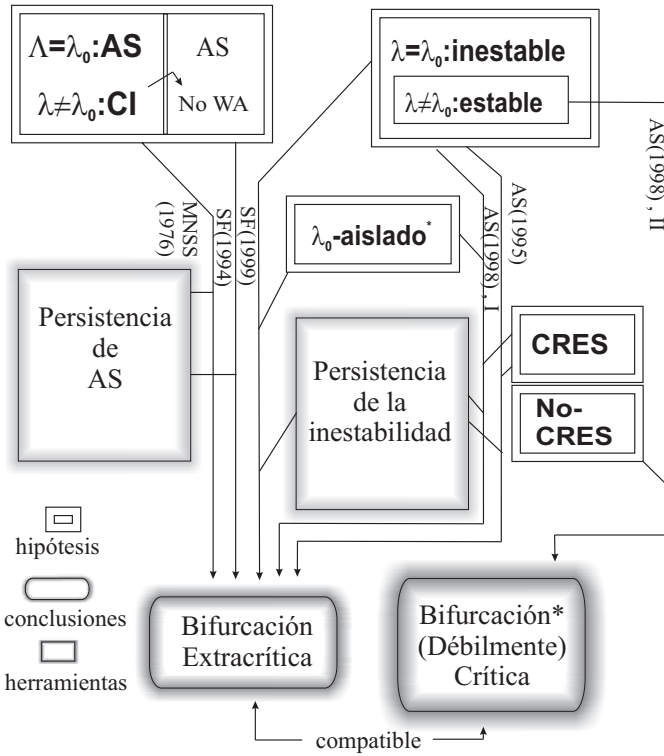
La propiedad CRES aparece típicamente en los casos donde la pérdida de la estabilidad resulta de la contracción de la región de atracción, como en la bifurcación de Hopf, mientras que el comportamiento no-CRES ocurre por ejemplo cuando surge la inestabilidad de una deformación continua de las espirales de un foco (ver el ejemplo al final del capítulo 3).

Los ejemplos en los cuales se ha aplicado la teoría incluyen ecuaciones diferenciales funcionales con retardo y sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

En el capítulo 4, presentamos las bifurcaciones que surgen de atractores estables, y en el, capítulo 5, abordamos estudio del caso especial de bifurcaciones de puntos (y conjuntos) silla usando un método topológico basado en argumentos del tipo Wazewski.

En conclusión podemos resumir los resultados como sigue: *Si un conjunto invariante compacto  $M$  exhibe una pérdida o ganancia de la estabilidad cuando el parámetro entra o sale de un valor crítico para el cual  $M$  es aislado de conjuntos invariantes,  $M$  exhibe a bifurcación, excepto, posiblemente, en un caso muy especial de la transición extracrítica desde un atractor estable hacia un conjunto silla rodeado completamente de órbitas homoclínicas.* Los resultados mencionados hasta ahora, están contenidos en el cuadro sinóptico en la Figura 0.3, mediante el cual ilustramos la teoría general de bifurcaciones desarrollada con este enfoque.

AS: estabilidad asintótica CI: completamente inestable WA: atractor débil



MNSS: Marchetti-Negrini-Salvadori-Scalia  
 SF : Seibert-Florio  
 AS : Aguirre-Seibert

\* excluida una de la otra

**Figure 0.3.** En el lado izquierdo, ilustramos algunos resultados del problema de bifurcaciones que surgen de equilibrios estables y, en el lado derecho las que surgen de equilibrios inestables en conexión con los tipos de cambios de estabilidad.

## Ejemplos de bifurcaciones

### 1.1. Bifurcaciones elementales

En esta sección exploramos el concepto principal de este curso: el fenómeno de *bifurcación*, el cual ocurre cuando la estructura de de las órbitas de una ecuación diferencial dependiente de un parámetro, cambia bruscamente bajo cambios pequeños del parámetro. A continuación vamos a considerar algunos ejemplos citados ampliamente en la literatura, ver por ejemplo [22], [8], [10] y [11] entre otros. Estos ejemplos son del tipo

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde  $\lambda$  es el parámetro.

EJEMPLO 1. Sea la familia de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = \lambda - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Tenemos que  $f(0, 0) = 0$ , es decir, el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio de (1.1) es inestable para  $\lambda = 0$ . Además para cada  $\lambda \neq 0$  los puntos de equilibrio de (1.1) están dados por la ecuación

$$x^2 = \lambda \quad (1.2)$$

de donde tenemos que para  $\lambda < 0$ , la correspondiente ecuación diferencial no tiene puntos de equilibrio. Mientras que para  $\lambda > 0$ , 1.1 tiene dos puntos de equilibrio: uno, para  $x = \sqrt{\lambda}$ , (asintóticamente) estable y, el otro para  $x = -\sqrt{\lambda}$  inestable. Estos puntos de equilibrio se colapsan cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . Por otra parte, notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

esto es, para  $\lambda = 0$ , la linealización del campo escalar  $f$  en  $x = 0$ , tiene un eigenvalor con parte real cero.

En este ejemplo de *bifurcación*, el punto  $(\lambda, x) = (0, 0)$  (vértice de la parábola en el plano  $\lambda - x$ ) se llama *punto de bifurcación* y el valor del parámetro  $\lambda = 0$  es el *valor de bifurcación*. La figura 1.1 en la cual se muestra la información dinámica de la familia de ecuaciones

diferenciales (1.1) se llama *diagrama de bifurcación*. Este tipo de bifurcación se conoce como *bifurcación nodo-silla*.

Investigaremos condiciones bajo las cuales una familia general de campos escalares que dependen de un parámetro  $\lambda$ , sufre una bifurcación nodo-silla como en el caso del ejemplo anterior. Para esto, consideremos la familia general de campos vectoriales unidimensionales dependientes del parámetro  $\lambda$ ,

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Supongamos que (1.3) tiene un punto de equilibrio fijo en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0, \quad (1.4)$$

además, supongamos que el punto de equilibrio no es hiperbólico, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (1.5)$$

Si

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0, \quad (1.6)$$

(como en la ecuación (1.1) para la cual  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 1$ ) entonces el teorema de la función implícita implica que existe una función

$$\lambda = \lambda(x), \quad \lambda(0) = 0 \quad (1.7)$$

definida para  $x$  suficientemente pequeña tal que  $f(\lambda(x), x) = 0$ . Las condiciones (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) y además,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}(0) = 0, \quad (1.8)$$

y

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}(0) \neq 0, \quad (1.9)$$

implican que el punto  $(\lambda, x) = (0, 0)$  sufre una bifurcación nodo-silla.

Para obtener expresiones equivalentes a (1.8) y (1.9) en términos de las derivadas de  $f$  evaluadas en los puntos de bifurcación, derivamos a  $f$  implícitamente con respecto a  $x$  a lo largo de la curva de los puntos de equilibrio de (1.3).

Usando (1.6) y aplicando el teorema de la función implícita existe  $\epsilon > 0$  y existe una función  $\lambda : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(\lambda(x), x) = 0, \quad \forall x \in B_\epsilon(0). \quad (1.10)$$

Derivando (1.10) implícitamente con respecto a  $x$  da

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(\lambda(x), x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda(x)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda(x)) \frac{d\lambda}{dx}(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Evaluando (1.11) en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , obtenemos

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0)}; \quad (1.12)$$

por lo tanto de (1.5), (1.7) y (1.12) concluimos que

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = 0, \quad (1.13)$$

es decir, la curva de puntos de equilibrio (1.7) es tangente a la línea  $\lambda = 0$  en  $x = 0$ .

Derivando otra vez (1.11) con respecto a  $x$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2}(\lambda(x), x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\lambda(x), x) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(\lambda(x), x) \frac{d\lambda}{dx}(x) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(\lambda(x), x) \left(\frac{d\lambda}{dx}(x)\right)^2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda(x), x) \frac{d^2 \lambda}{dx^2}(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Evaluando (1.14) en  $(\lambda, x) = (0, 0)$  y aplicando (1.9) y (1.13) obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \frac{d^2 \lambda}{dx^2}(0) = 0$$

y luego,

$$\frac{d^2 \lambda}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0)}. \quad (1.15)$$

Entonces, (1.15) es diferente de cero puesto que tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$$

Resumiendo, si  $f$  satisface las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

Entonces (1.3) sufre una bifurcación nodo-silla para  $(\lambda, x) = (0, 0)$ .

Las ecuaciones (1.16) y (1.17) implican que existe una única curva de puntos de equilibrio en el plano  $\lambda x$ , que pasa a través del punto  $(\lambda, x) = (0, 0)$  tangente a la recta  $\lambda = 0$  y, la segunda ecuación en (1.17)

implica que esta curva está localmente por un lado de la recta  $\lambda = 0$ . Si  $-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)/\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) > 0$ , la gráfica de puntos de equilibrio está por el lado derecho de la recta  $\lambda = 0$  (concavidad dirigida hacia el lado derecho) en el plano  $\lambda x$ . Si  $-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)/\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) < 0$ , la gráfica de puntos de equilibrio está por el lado izquierdo de la recta  $\lambda = 0$  (concavidad dirigida hacia el lado izquierdo) en el plano  $\lambda x$ . Es fácil verificar que para la ecuación (1.1) del ejemplo 1,  $-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)/\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 2 > 0$ .

Consideremos una familia de campos vectoriales unidimensionales,  $f(\lambda, x)$ , que tienen un punto fijo no hiperbólico en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ .

La expansión de Taylor para este campo vectorial alrededor de  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , está dada por

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) = & f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) + \frac{1}{2} \left[ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \right. \\ & \left. + x\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) + \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(0, 0) \right] + \frac{1}{3!} [x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \\ & + x^2 \lambda \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \lambda}(0, 0) + x\lambda^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \lambda^2}(0, 0) + \lambda^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda^3}(0, 0)] + \mathcal{O}(4). \end{aligned} \quad (1.18)$$

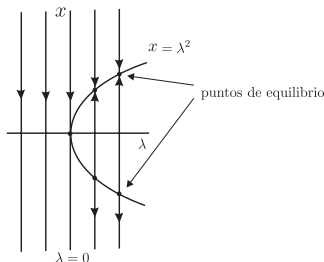
Tomando en cuenta (1.16) y (1.17), (1.18) queda,

$$f(\lambda, x) = a_0 \lambda + a_1 x^2 + a_2 \lambda x + a_3 \lambda^2 + \mathcal{O}(3), \quad (1.19)$$

donde las constantes  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , son los valores de las derivadas parciales de  $f$  en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ . La estructura del diagrama de bifurcación de (1.3) en una vecindad suficientemente pequeña de  $(\lambda, x) = (0, 0)$  donde  $f(\lambda, x)$  es de la forma (1.19) es la misma que la de uno de los siguientes campos escalares escritos en su forma normal

$$\dot{x} = \lambda \pm x^2. \quad (1.20)$$

La ecuación (1.20), se llama la *forma normal* para la bifurcación nodo-silla. En la figura 1.1 se muestra el diagrama de bifurcación para el caso del signo negativo en (1.20).



**Figure 1.1.** Bifurcación nodo-silla.



EJEMPLO 2. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = \lambda x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Verificamos fácilmente que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

El conjunto de los puntos de equilibrio de la ecuación (1.21) está dado por

$$\{(\lambda, x) \mid x = 0 \text{ o } x = \lambda\}.$$

En este caso tenemos que para cada  $\lambda < 0$ , la ecuación diferencial (1.21) tiene dos puntos de equilibrio: uno para  $x = 0$ , (asintóticamente) estable y el otro para  $x = \lambda$ , inestable. Cuando  $\lambda$  alcanza el valor crítico  $\lambda = 0$ , estos dos puntos de equilibrio se colapsan en uno:  $x = 0$ , el cual queda inestable. Para cada  $\lambda > 0$ , se separan dos equilibrios  $x = 0$  y  $x = \lambda$ , invirtiendo su propiedad de estabilidad con respecto al caso  $\lambda < 0$ : el punto  $x = 0$  cambia a inestable y el punto  $x = \lambda$  cambia a (asintóticamente) estable. Notemos que,  $x = 0$  es un punto de equilibrio fijo para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  y cuando  $\lambda$  sobrepasa el valor crítico del parámetro  $\lambda = 0$ , el equilibrio fijo sufre un cambio de estabilidad. A este tipo de bifurcación se le llama *bifurcación transcítica*.

La estructura de las órbitas en una vecindad del punto de bifurcación de la ecuación (1.21) del ejemplo 2, está caracterizado por las siguientes condiciones: a) existen dos curvas de puntos de equilibrio que pasan a través de  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , una está dada por  $x = \lambda$ , y la otra por  $x = 0$ , en el plano  $\lambda x$ ; b) las curvas de puntos de equilibrio existen en ambos lados de la recta  $\lambda = 0$ ; y finalmente, c) la estabilidad a lo largo de cada curva de puntos de equilibrio cambia al cruzar la recta  $\lambda = 0$ .

Buscaremos las condiciones para que una familia general de campos vectoriales escalares que dependen del parámetro  $\lambda$ , tenga dos curvas de puntos de equilibrio en el plano  $\lambda x$  tales que contengan el punto de bifurcación  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , y cumplan las propiedades a), b) y c), como del ejemplo 2.

Sea el campo vectorial escalar

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Supongamos que (1.22) tiene un punto de equilibrio fijo en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0,$$

además, supongamos que el punto de equilibrio no es hiperbólico, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Por otra parte, en el ejemplo 2 la ecuación diferencial (1.21) tiene dos curvas de puntos de equilibrio:  $x = 0$  y  $x = \lambda$  y estas contienen el origen  $(\lambda, x) = (0, 0)$ . Para que esto ocurra en el caso general ponemos la condición

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0, \quad (1.23)$$

puesto que pedimos que  $f(0, \lambda) = 0$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  o por el teorema de la función implícita, debe existir una única curva de puntos fijos a través del origen,

$$\lambda = \lambda(x), \quad \lambda(0) = 0 \quad (1.24)$$

definida para  $x$  suficientemente pequeña tal que  $f(\lambda(x), x) = 0$ .

Para seguir un procedimiento análogo al del ejemplo 1, necesitamos la condición,  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$ , para poder aplicar el teorema de la función implícita. Sin embargo, debido a la ecuación (1.23), el procedimiento del ejemplo 1 no se puede seguir tal cual. Para considerar la recta  $x = 0$ , de puntos de equilibrio que contiene el punto de bifurcación  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , escribimos la ecuación (1.22) en la siguiente forma apropiada

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = xF(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

donde definimos

$$F(\lambda, x) \equiv \begin{cases} \frac{f(\lambda, x)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda), & x = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Así, la curva  $x = 0$ , es una curva de puntos de equilibrio para la ecuación (1.25). Para encontrar otra curva de puntos de equilibrio que conenga el punto  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , lo haremos en términos de las derivadas parciales de  $F$ , las cuales a su vez las expresamos en términos de las derivadas parciales de  $f$ , usando la definición (1.26).

De la función  $F(\lambda, x)$  en (1.26) verificamos lo siguiente

$$F(0, 0) = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0), \quad (1.29)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0). \quad (1.30)$$

Suponiendo que (1.30) es diferente de cero, entonces por el teorema de la función implícita existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  que contiene el 0 y existe una función  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lambda = \lambda(x)$  tal que

$$F(\lambda(x), x) = 0. \quad (1.31)$$

Es claro que la curva descrita por  $\lambda(x)$  es una curva de puntos fijos de (1.25). Para asegurar que esta curva no coincide con la curva  $x = 0$ , y que existe por ambos lados de la recta  $x = 0$ , suponemos que

$$0 < \left| \frac{d\lambda}{dx}(0) \right| < \infty.$$

Derivando (1.31) implícitamente con respecto a  $x$  da

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(\lambda(x), x) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda(x)) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda(x)) \frac{d\lambda}{dx}(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Evaluando en  $(\lambda, x) = (0, 0)$  obtenemos

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0)}; \quad (1.33)$$

Tomando en cuenta (1.27) a (1.30) y 1.32, la ecuación (1.33) se escribe como

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0)}; \quad (1.34)$$

Resumiendo, sea el campo vectorial escalar

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.35)$$

Suponiendo que (1.35) tiene un punto de equilibrio fijo en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0,$$

y que además, se cumplen las siguientes hipótesis sobre la función  $f$  y sus derivadas

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \end{array} \right\} \quad (1.37)$$

entonces el equilibrio  $(\lambda, x) = (0, 0)$  de (1.35), sufre una bifurcación transcítica.

Suponiendo (1.36), (1.37), y considerando (1.18) la expansión de Taylor del campo vectorial escalar,  $f(\lambda, x)$  alrededor de  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , está dada por

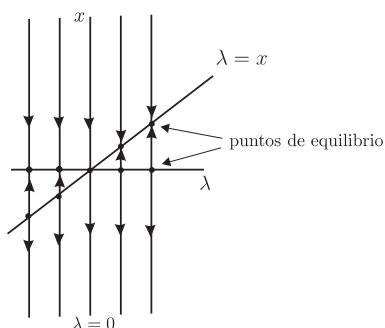
$$f(\lambda, x) = a_1 x^2 + a_2 \lambda x + a_3 \lambda^2 + \mathcal{O}(3), \quad (1.38)$$

donde las constantes  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , resultan de la evaluación de las derivadas parciales de  $f$  en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ .

La estructura de las órbitas de (1.35) en una vecindad suficientemente pequeña de  $(\lambda, x) = (0, 0)$  donde  $f(\lambda, x)$  es de la forma (1.38) es la misma que la estructura de las órbitas de

$$\dot{x} = \lambda x \mp x^2. \quad (1.39)$$

La ecuación (1.39), se llama la forma normal para la bifurcación transcítica, el diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la figura 1.2, para el signo negativo en la ecuación (1.39).



**Figure 1.2.** Bifurcación transcítica.

**EJEMPLO 3.** Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = \lambda x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

Se puede verificar fácilmente que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

El conjunto de los puntos de equilibrio de la ecuación (1.40) es

$$\{(\lambda, x) \mid x = 0 \text{ o } x^2 = \lambda\}.$$

Para  $\lambda \leq 0$ , la ecuación diferencial (1.40) tiene un único punto de equilibrio,  $x = 0$ , el cual es (asintóticamente) estable. Cuando  $\lambda$  sobrepasa el valor crítico  $\lambda = 0$ , tomando valores  $\lambda > 0$ , el punto de equilibrio  $x = 0$  pierde la estabilidad, volviéndose inestable y surgen dos nuevos puntos de equilibrio:  $x = \sqrt{\lambda}$  y  $x = -\sqrt{\lambda}$ , ambos (asintóticamente) estables. Estos puntos de equilibrio se separan cuando  $\lambda$  crece. El punto,  $x = 0$ , es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (1.40), para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Este tipo de bifurcación se le llama *bifurcación trinche*.

La geometría de del diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación (1.40) está caracterizada mediante las siguientes propiedades: (a) las curvas de puntos de equilibrio que contienen el punto de equilibrio  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , son  $x = 0$ , y  $\lambda = x^2$ ; (b) la curva  $x = 0$ , está por ambos lados de la recta  $\lambda = 0$ , y la curva  $\lambda = x^2$ , está por un solo lado de la recta  $\lambda = 0$ ; (c) los puntos de equilibrio sobre la recta  $x = 0$ , tienen diferente tipo de estabilidad en los semiplanos opuesto y separados por la recta  $\lambda = 0$ , en el plano  $\lambda x$ . Los puntos de equilibrio sobre la recta  $\lambda = x^2$ , tienen el mismo tipo de estabilidad.

Buscaremos condiciones sobre una familia general de campos vectoriales escalares que dependen de un parámetro, tales que, el diagrama de bifurcación resultante de la ecuación diferencial definida con este campo escalar, tenga las propiedades a), b) y c) del ejemplo 3 en una vecindad del punto de bifurcación.

Consideremos el campo vectorial escalar

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.41)$$

Supongamos que (1.41) tiene un punto de equilibrio fijo en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0,$$

si además el punto de equilibrio no es hiperbólico, escribimos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Para que existan dos curvas de puntos de equilibrio que contengan el origen  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , donde una de estas es la curva  $x = 0$ , ponemos

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0,$$

puesto que  $f(\lambda, 0) = 0$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ , o por el teorema de la función implícita, debe existir una única curva de puntos de equilibrio que contiene origen del plano  $\lambda x$ .

Para considerar la recta  $x = 0$ , de puntos de equilibrio que contiene el punto de bifurcación  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , reescribimos la ecuación (1.41) como

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = xF(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.42)$$

donde definimos

$$F(\lambda, x) \equiv \begin{cases} \frac{f(\lambda, x)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda), & x = 0 \end{cases}. \quad (1.43)$$

Para obtener la segunda curva de puntos de equilibrio de (1.42) ponemos la condición

$$F(0, 0) = 0, \quad (1.44)$$

con

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \quad (1.45)$$

De (1.44) y (1.45), aplicando el teorema de la función implícita existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  que contiene el 0 y existe una función  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lambda = \lambda(x)$  tal que

$$F(\lambda(x), x) = 0. \quad (1.46)$$

Para que la curva  $\lambda(x)$ , de puntos de equilibrio de (1.41), no coincida con la curva  $x = 0$ , y que esté por la izquierda o derecha de la recta  $x = 0$ , suponemos que

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = 0 \quad (1.47)$$

y

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}(0) \neq 0 \quad (1.48)$$

Las condiciones equivalentes a (1.47) y (1.48) respectivamente, se obtienen derivando implícitamente (1.46) quedando como

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0)} = 0 \quad (1.49)$$

y

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0)} \neq 0 \quad (1.50)$$

De la definición de  $F$  en términos de  $f$  en (1.43) las ecuaciones (1.49) y (1.50) quedan escritas como

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0)} = 0$$

y

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0)} \neq 0,$$

respectivamente.

Resumiendo, sea el campo vectorial escalar

$$\dot{x} = f(\lambda, x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.51)$$

Supongamos que (1.51) satisface las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0, \end{array} \right. \quad (1.53)$$

entonces el equilibrio  $(0, 0)$  de (1.51), sufre una bifurcación del tipo trinche.

Suponiendo (1.52), (1.53), y considerando (1.18) la expansión de Taylor del campo vectorial escalar,  $f(\lambda, x)$  alrededor del punto de equilibrio no hiperbólico,  $(\lambda, x) = (0, 0)$ , está dada por

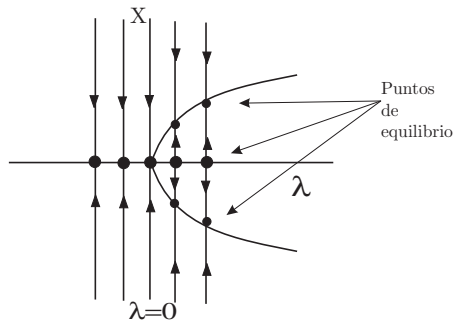
$$f(\lambda, x) = a_2 \lambda x + a_3 \lambda^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 \lambda a_6 x \lambda^2 + a_7 \lambda^3 + \mathcal{O}(4), \quad (1.54)$$

donde las constantes  $a_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , resultan de la evaluación de las derivadas parciales de  $f$  en  $(\lambda, x) = (0, 0)$ .

La estructura del diagrama de bifurcación de (1.51) en una vecindad suficientemente pequeña de  $(\lambda, x) = (0, 0)$  donde  $f(\lambda, x)$  es de la forma (1.54) es la misma que la estructura del diagrama de bifurcación de

$$\dot{x} = \lambda x \pm x^3. \quad (1.55)$$

Ver figura 1.3, en la cual el diagrama de bifurcación corresponde al de la ecuación (1.55) con el signo negativo. La ecuación (1.55) se le conoce



**Figure 1.3**

como la forma normal de la bifurcación del tipo trinche.

**EJEMPLO 4.** Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(\lambda, x) = \lambda - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.56)$$

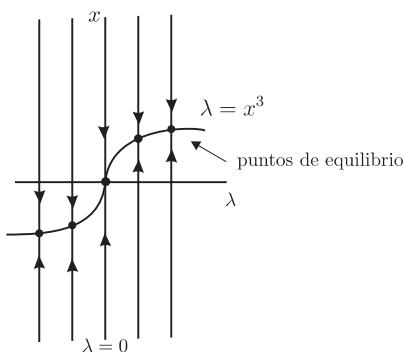
Se puede verificar fácilmente que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

El conjunto de los puntos de equilibrio de la ecuación (1.40) está dado por

$$\{(\lambda, x) \mid \lambda = x^3\}.$$

Para todo  $\lambda \leq 0$  la ecuación diferencial tiene un punto de equilibrio,  $x = \sqrt[3]{\lambda}$ , que es (asintóticamente) estable. Cuando  $\lambda$  sobrepasa el valor  $\lambda = 0$ , el equilibrio fijo  $x = 0$  no sufre ningún cambio de estabilidad. No hay bifurcación. Ver figura 1.4.



**Figure 1.4**

Adoptamos la siguiente definición provisional de bifurcación para el caso de una familia de ecuaciones diferenciales definidas por campos escalares que dependen de un parámetro real.

**DEFINICIÓN 1.1.1.** Un punto de equilibrio  $(\lambda, x) = (0, 0)$  de una familia de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = f(\lambda, x)$  que depende del parámetro  $\lambda$ , se dice que sufre una bifurcación en  $\lambda = 0$  si el flujo,  $F_\lambda^t(x)$  para  $\lambda$  cerca de  $\lambda = 0$  y  $x$  cerca de  $x = 0$ , no es cualitativamente equivalente al flujo  $F_0^t(x)$  cerca de  $x = 0$ .

## 1.2. La forma normal de la bifurcación de Hopf

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales que dependen del parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

el punto de equilibrio de este sistema es  $x = 0, \quad y = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



La matriz jacobiana evaluada en el origen  $A(\lambda)$ , está dada por

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

y tiene eigenvalores  $\mu_{1,2} = \lambda \pm i$ . Haciendo el cambio de variable  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ . Siendo la pareja  $x(t), y(t)$  solución de (1.57), la función de valores complejos  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ &= \lambda(x + iy) + i(x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir en la forma compleja como sigue:

$$\dot{z} = (\lambda + i)z - z|z|^2. \quad (1.59)$$

Por otra parte, usando la representación polar de  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = re^{i\theta}$  y derivando con respecto a  $t$  obtenemos

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + ri\dot{\theta}e^{i\theta},$$

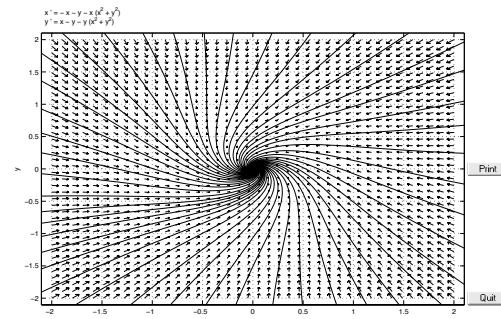
equivalentemente

$$\dot{r}e^{i\theta} + ri\dot{\theta}e^{i\theta} = re^{i\theta}(\lambda + i - r^2), \quad (1.60)$$

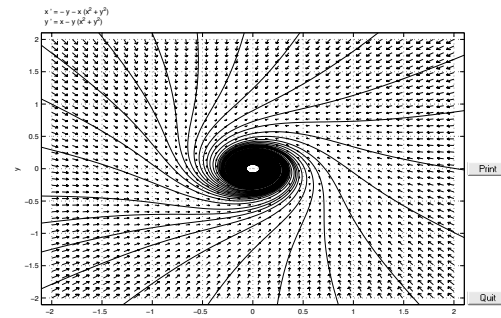
igualando las partes reales y las partes imaginarias de (1.60) obtenemos la forma polar del sistema (1.57),

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\lambda - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

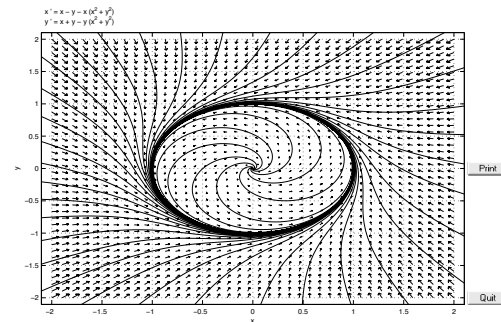
El retrato fase se muestra en la figura 1.5. Para  $\lambda \leq 0$  el origen  $(0, 0)$  es (asintóticamente) estable; para  $\lambda > 0$  surge una órbita periódica  $x^2 + y^2 = \lambda$  (ciclo límite) la cual se colapsa en el equilibrio  $(0, 0)$ , cuando  $\lambda \rightarrow 0^+$ . Todas las soluciones con puntos iniciales fuera del ciclo límite o en el interior de él con excepción del origen  $(0, 0)$ , tienden hacia el ciclo cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Por el surgimiento de una órbita periódica para valores de  $\lambda > 0$ , siendo  $\lambda = 0$  el punto de bifurcación, de le llama *bifurcación supercrítica (bifurcación extracrítica)*. Este fenómeno que presenta el sistema (1.57) es lo que se llama una bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf. Un bosquejo de esta bifurcación en el espacio tridimensional  $xy\lambda$  se muestra en el diagrama de bifurcación en la figura 1.6 Un sistema que tiene los términos no lineales con el signo opuesto a los del sistema (1.57)



The backward orbit from (0.77, 2) left the computation window.  
 Ready.  
 The forward orbit from (1, 2) -> a possible eq. pt. near (0.011, 0.0019).  
 The backward orbit from (-1, 2) left the computation window.  
 Ready.



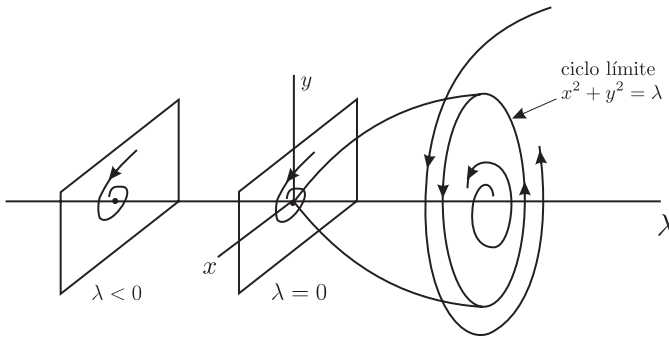
The backward orbit from (1.6, 0.65) left the computation window.  
 Ready.  
 The forward orbit from (-1.7, 0.17) -> a nearly closed orbit.  
 The backward orbit from (-1.7, 0.17) left the computation window.  
 Ready.



The backward orbit from (0.12, 0.35) -> a possible eq. pt. near (0.0006, -0.013).  
 Ready.  
 The forward orbit from (-0.59, -0.21) -> a nearly closed orbit.  
 The backward orbit from (-0.59, -0.21) -> a possible eq. pt. near (0.01, -0.0078).  
 Ready.

Figure 1.5

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$



**Figure 1.6.** Cambio de estabilidad del equilibrio: asintóticamente estable a completamente inestable.

tiene la forma compleja

$$\dot{z} = (\lambda + i)z + z|z|^2. \quad (1.62)$$

y la forma polar

$$\dot{r} = r(\lambda + r^2)$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

Para  $\lambda \geq 0$  el origen  $(0,0)$  es (completamente) inestable, y para cada  $\lambda < 0$ , surge ciclo límite,  $x^2 + y^2 = -\lambda$  el cual se colapsa en el origen cuando  $\lambda \rightarrow 0^-$ . Cualquier solución con punto inicial en el interior de la región limitada por el ciclo, tiende hacia  $(0,0)$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Cualquier solución con punto inicial en el exterior de la región limitada por el ciclo tiende a  $\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esta bifurcación se le llama *subcrítica* porque los ciclos límite surgen para valores del parámetro menores que el punto de bifurcación  $\lambda = 0$ . También le llamamos *bifurcación extracrítica*. Ver la figura 1.7. La bifurcación surge cuando el parámetro sale del valor crítico,  $\lambda = 0$ , para el cual el origen del sistema es inestable. Si invertimos el sentido del tiempo en el sistema (1.57), reemplazando  $t$  por  $-t$ , el sistema queda

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.63)$$

tiene la forma compleja

$$\dot{z} = -(\lambda + i)z + z|z|^2. \quad (1.64)$$

y la forma polar

$$\dot{r} = -r(\lambda + r^2)$$

$$\dot{\theta} = -1.$$

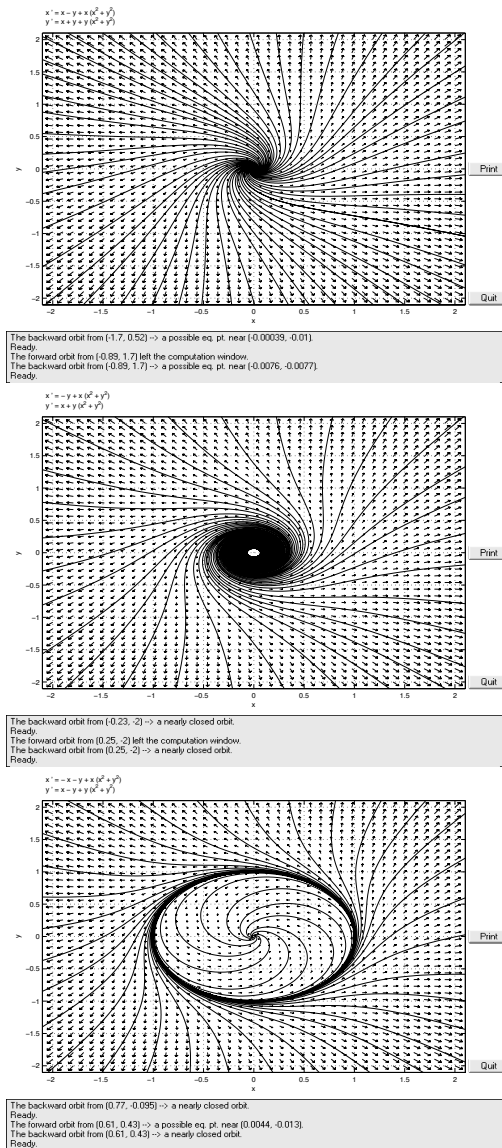


Figure 1.7

Para  $\lambda \leq 0$ , el equilibrio  $(0, 0)$  del sistema (1.63) es inestable. Si  $\lambda > 0$ , para cada valor de  $\lambda$  surge un ciclo límite definido por,  $x^2 + y^2 = \lambda$ . Cada órbita con punto inicial en el interior de la región limitada por el ciclo,

tiende hacia el equilibrio (asintóticamente estable)  $(0, 0)$  del sistema (1.63). Tenemos aquí un ejemplo de lo que llamamos bifurcación extracrítica con ganancia extracrítica de la estabilidad (pérdida crítica de la estabilidad), lo que en la literatura llaman bifurcación supercrítica. Ver figuras 1.8 y 1.9.

La parte lineal del sistema (1.57)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

en su forma compleja se escribe como

$$\dot{z} = (\lambda + i)z,$$

y en su representación polar queda

$$\dot{r} = \lambda r$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

Para  $\lambda < 0$ , el origen  $(0, 0)$  es un equilibrio (asintóticamente) estable. Para  $\lambda = 0$ , el equilibrio es un centro y para  $\lambda > 0$  el equilibrio  $(0, 0)$  es inestable. Este tipo de bifurcación se llama bifurcación vertical o bifurcación crítica. Ver figura 1.10 Si sumamos términos de orden mayor que 3 a la ecuación (1.57)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^4), \quad (1.66)$$

la estructura de las órbitas de (1.66) es la misma que la del sistema (1.57). Ver por ejemplo [K].

### 1.3. El teorema de la bifurcación de Hopf

El **Teorema de Hopf** nos da algunas condiciones suficientes para la ocurrencia de este tipo de bifurcación y se enuncia en el siguiente contexto.

Dado el sistema,

$$\dot{x} = F(\lambda, x), \quad (x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \lambda \in \mathbb{R}) \quad (1.67)$$

(con  $F$  analítica en  $x$ ). Se supone que  $x = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  es decir:

$$F(\mathbf{0}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}). \quad (1.68)$$

Separamos  $F$  en partes lineal y no lineal:

$$\dot{x} = L_\lambda x + f(\lambda, x). \quad (1.69)$$

( $L_\lambda$  es una matriz de  $n \times n$  independiente de  $x$ ). Entonces vale:

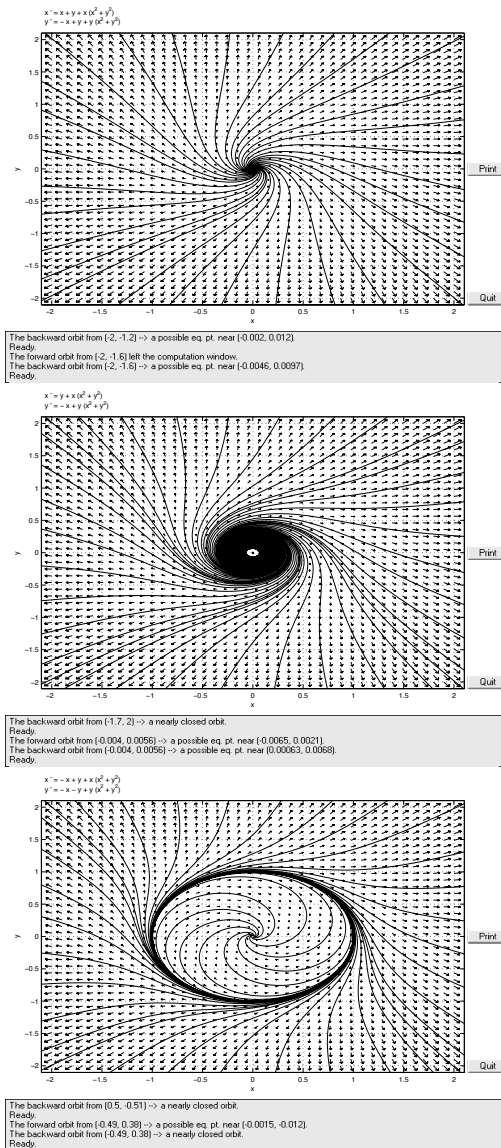
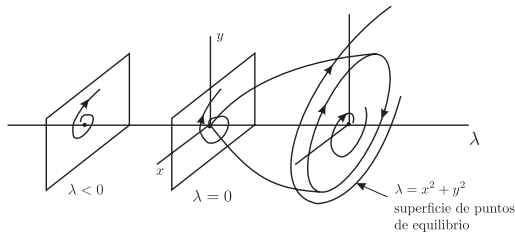


Figure 1.8

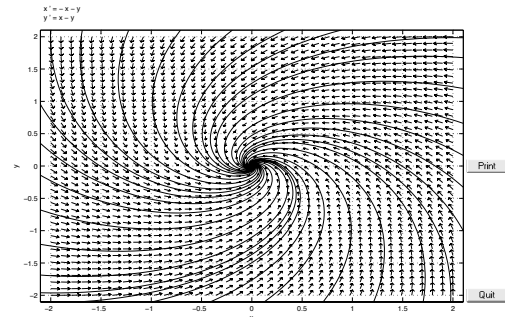
TEOREMA 1.3.1. ([9],[15]) Para  $\lambda = 0$ , sean exactamente dos autovalores de  $L_\lambda$  puramente imaginarios:  $\mu_\pm = \pm i\beta$  ( $\beta > 0$ ) y suponiendo que las trayectorias de  $\mu_\pm(\lambda)$  crucen el eje imaginario transversalmente



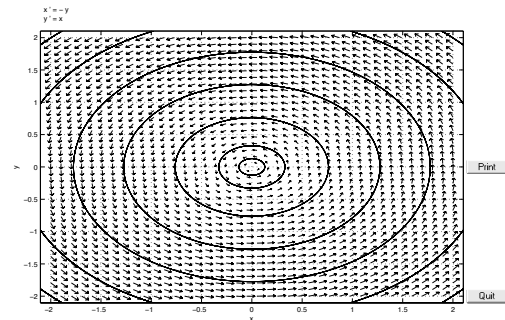
**Figure 1.9.** Cambio de estabilidad del equilibrio: asintóticamente estable a completamente inestable.

(ver la Figura 1.11). Entonces existe una familia de soluciones periódicas dependientes del parámetro  $\lambda$  que se acumulan en el origen para  $\lambda \rightarrow 0$ . En general las soluciones periódicas existen o para  $\lambda < 0$  ("subcrítico"),  $\lambda > 0$  ("ultracrítico"), o  $\lambda = 0$  ("crítico"). En los primeros dos casos, existe para cada  $\lambda$  (suficientemente pequeña) exactamente un ciclo (esto no se cumple cuando no vale la condición de transversalidad).

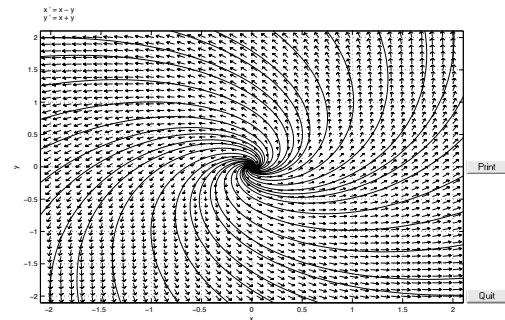
1. EJEMPLOS DE BIFURCACIONES



The backward orbit from (2, -1.2) left the computation window.  
 Ready.  
 The forward orbit from (2, -1.7) -> a possible eq. pt. near (0.013, 0.004).  
 The backward orbit from (2, -1.7) left the computation window.  
 Ready.



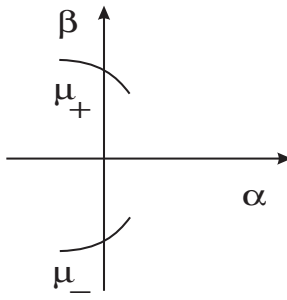
The backward orbit from (1.5, -1.8) -> a nearly closed orbit.  
 Ready.  
 The forward orbit from (2, -2) -> a nearly closed orbit.  
 The backward orbit from (2, -2) -> a nearly closed orbit.  
 Ready.



The backward orbit from (2, 0.27) -> a possible eq. pt. near (0.0039, 0.01).  
 Ready.  
 The forward orbit from (2, 0.8) left the computation window.  
 The backward orbit from (2, 0.8) -> a possible eq. pt. near (0.0016, 0.011).  
 Ready.

Figure I.10





**Figure 1.11.** Ilustración de la hipótesis de transversalidad del Teorema 1.3.1, de la bifurcación de Hopf.



## Persistencia de la inestabilidad y bifurcaciones que surgen equilibrios inestables

### 2.1. Familias continuas de (semi-)grupos de transformaciones. Compacidad asintótica local

Una familia continua de sistemas (semi)dinámicos o (semi)grupos continuos,  $(X, T, \Lambda, F)$ , consiste de un espacio métrico, por ejemplo lineal normado  $(X, \|\cdot\|)$  (el espacio de estados), el (semi)grupo topológico ordenado  $T$  de los números reales (no negativos, llamado *escala de tiempo*), un espacio métrico  $(\Lambda, \rho)$  (el espacio de parámetros), y una transformación continua:  $F : X \times T \times \Lambda \rightarrow X$  (la *dinámica*). Definimos, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , el  $\lambda$ -sistema  $F_\lambda : X \times T \rightarrow X$  mediante:  $F_\lambda(x, t) := F(x, t, \lambda)$ . Denotaremos la familia  $(X, T, \Lambda, F)$  por  $F_\Lambda := \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ , donde  $F_\Lambda$  representa una familia de sistemas (semi)dinámicos. Suponemos que la familia  $F_\Lambda$  satisface los siguientes axiomas:

- (I)  $F_\lambda^0$  es la transformación identidad ( $\lambda \in \Lambda$ ).
- (II)  $F_\lambda^t F_\lambda^{t'} = F_\lambda^{t+t'}$  ( $t, t' \in T, \lambda \in \Lambda$ ).
- (III)  $F$  es continuo en  $T \times X \times \{\lambda_0\}$ .
- (IV)  $F$  es continuo con respecto al parámetro  $\lambda$ , en  $\lambda_0$ , uniformemente en  $x$  y  $t$  en subconjuntos  $B$  acotados de  $X$  y en intervalos acotados, es decir:

$$(\forall B \in \mathcal{B})(\forall \tau \in T, \epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})$$

$$(\forall x \in B, t \in [0, \tau], \lambda \in N) \quad d(F_\lambda^t(x), F_{\lambda_0}^t(x)) < \epsilon.$$

A veces  $F$  puede no estar definida para todo  $t \in T$ , y sin embargo la teoría hace sentido. La métrica asociada a la norma la denotamos por:  $d(x, y)$ . Además usaremos las siguientes notaciones

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\},$$

$$S_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}, \quad (r > 0, x \in X)$$

$$B_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\},$$

$$S_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) = r\} \quad (A \subset X),$$

donde  $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ .

Las sucesiones  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , las denotamos simplemente por  $x_{\mathbb{N}}$ .

Fijamos un elemento  $\lambda_0 \in \Lambda$ , y denotamos el sistema de vecindades de  $\lambda_0$  por  $\mathcal{N}$ . Al sistema  $F_{\lambda_0}$  lo llamamos *no perturbado*, y los otros  $F_\lambda$ , para  $\lambda \neq \lambda_0$ , perturbados (con respecto a  $F_{\lambda_0}$ ).

El filtro generado por las vecindades esféricas de un punto  $x$  o un subconjunto compacto  $M$  de  $X$  los denotamos con  $\mathcal{V}_x$  y  $\mathcal{V}_M$ , respectivamente. La familia de conjuntos acotados en  $X$ , la denotamos con  $\mathcal{B}$ .

Las transformaciones  $F_\lambda^t : X \rightarrow X$  definen para cada  $t$  y para cada  $\lambda$  las  $t$ -transiciones mediante  $F_\lambda^t(x) := F(x, t, \lambda)$  para todo  $x \in X$ , y la familia de funciones punto conjunto de la forma  $F_{t,\lambda} : X \rightarrow 2^X$ ,  $F_{t,\lambda}(x) := \{F_\lambda^{t'}(x) \mid t' \geq t\}$ , para toda  $x \in X$ , y para toda  $(t, \lambda) \in T \times \Lambda$ , definen las  $\lambda$ -semiórbitas retardadas. En particular, la  $\lambda$ -semiórbita positiva a través de  $x \in X$ , la escribiremos como:  $y_\lambda^+(x) := F_{0,\lambda}(x) = \{F_\lambda^t(x) \mid t \geq 0\}$ , al conjunto límite correspondiente a  $x$  como  $L_\lambda^+(x) \left( := \bigcap \{\overline{F_{t,\lambda}(x)} \mid t > 0\} \right)$ . En términos de sucesiones,  $L_\lambda^+(x) := \{y \in X \mid \exists t_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+, t_n \rightarrow +\infty, F_\lambda^{t_n}(x) \rightarrow y\}$ . Si  $A \subset X$ ,  $y_\lambda^+(A) := \bigcup \{y_\lambda^+(x) \mid x \in A\}$ . Además, si  $x \in X$ ,  $t \in T$ ,  $A \subset X$ ,  $I \subset T$ , escribimos

$$F^t(A) := \{F^t(x) \mid x \in A\},$$

$$F^I(x) := \{F^t(x) \mid t \in I\},$$

$$F^I(A) := \{F^t(x) \mid x \in A, t \in I\},$$

y análogamente para otras transformaciones.

Observamos que como consecuencia del axioma (II), vale la identidad,  $F_{t,\lambda}(x) = y_\lambda^+(F_\lambda^t(x))$ , que relaciona una  $\lambda$ -semiórbita retardada en  $x$  con una  $\lambda$ -semiórbita positiva a través de  $F_\lambda^t(x)$ .

El interior, la cerradura y la frontera del conjunto  $A$ , los denotamos por  $A^\circ$ ,  $\bar{A}$  y  $\partial A$  respectivamente, y al complemento del conjunto  $A$ , por  $\bar{C}A$ .

DEFINICIÓN 2.1.1. El sistema (semi-)dinámico  $F^T$  es localmente *asintóticamente compacto* (LAC) sobre el conjunto  $A \subset X$  si para cada pareja de sucesiones  $x_{\mathbb{N}} \subset X$ ,  $t_{\mathbb{N}} \subset T$ , tales que  $t_n \rightarrow +\infty$  y  $\{F^{[0, t_n]}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ , el conjunto  $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacto. (Si  $A$  es relativamente compacto, la condición se cumple automáticamente.) {Si  $A$  es acotado, esta propiedad es implicada por el concepto bien conocido de *compacidad asintótica*, que significa que

para cualquier sucesión acotada  $x_{\mathbb{N}}$  y toda sucesión  $t_{\mathbb{N}}$ , tal que  $t_n \rightarrow +\infty$ , la sucesión  $\{F^{t_n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacta.

Definimos para cada  $\lambda \in \Lambda$  el conjunto  $\lambda$ -límite  $L_{\lambda}^+(A)$  del conjunto  $A$ , como el conjunto de los límites de todas las sucesiones convergentes de la forma  $\{F_{\lambda}^{t_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$  donde  $x_k \in A$  y  $t_k \rightarrow +\infty$ .

Un conjunto  $M \subset X$  es *positivamente  $\lambda$ -invariante* si  $\gamma^+(M) = M$ , y es  *$\lambda$ -invariante* si tanto  $M$  como  $X \setminus M$  son positivamente  $\lambda$ -invariantes.

## 2.2. Inestabilidad

Consideremos un (semi-)grupo de transformaciones {o sistema (semi-)dinámico}  $F^T$  ( $T = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^+$ ) actuando sobre un espacio métrico  $X$ .

DEFINICIÓN 2.2.1. Suponiendo  $M = \overline{M} \subset X$ , definimos el conjunto de inestabilidad de  $M$  como

$$I(M) = \{\gamma \in X \setminus M \mid \exists x_{\mathbb{N}}, \gamma_{\mathbb{N}} \text{ tal que } d(x_n, M) \rightarrow 0, \gamma_n \rightarrow \gamma, \gamma_n \in \gamma^+(x_n)\}.$$

Esta es la prolongación usual de  $M$ , con el conjunto  $M$  removido, y puede ser descrito como el conjunto de todos los puntos que pueden ser aproximados desde puntos arbitrariamente cercanos a  $M$ .

PROPOSICIÓN 2.2.2. Si  $M$  es compacto, positivamente invariante e inestable bajo  $F^T$ , y LAC en una vecindad de  $M$ , entonces  $I(M)$  es no vacío.

La demostración es análoga a la del caso de sistemas dinámicos sobre un espacio métrico localmente compacto (c.f [5]) con la única diferencia que se usa la propiedad LAC en lugar de la compacidad de una vecindad de  $M$ .

## 2.3. La Persistencia de la Inestabilidad

Ahora consideremos una familia de semigrupos,  $F_{\Lambda}$ , que actúa sobre  $X$ .

PROPOSICIÓN 2.3.1. {Principio de persistencia de la inestabilidad} Sea  $M$  un conjunto compacto, positivamente invariante que es inestable para  $\lambda = \lambda_0$ , y supongamos que  $\gamma \in I_{\lambda_0}(M)$ . Entonces, para cualquier pareja de vecindades  $U$  y  $V$  de  $M$  y de  $\gamma$  respectivamente, existe una vecindad de  $\lambda_0$ , tal que  $\gamma_{\lambda}^+(U) \cap V \neq \emptyset$  vale para todo  $\lambda \in N$ .

La demostración se sigue inmediatamente de la continuidad de la aplicación  $F$ .

La propiedad de persistencia es de naturaleza general de semi-continuidad inferior, aunque no está exactamente cubierta por este concepto. Podemos decir que es la negación de la implosión; en este lenguaje la propiedad en cuestión puede ser descrita como cuando

$I_\lambda(M)$  es no impositiva para  $\lambda = \lambda_0$ . Considerando que la inestabilidad de una pequeña vecindad de un conjunto tiene practicamente el mismo efecto que la inestabilidad del conjunto mismo, se puede decir en términos generales que *un cambio pequeño del parámetro no puede disminuir el tamaño de la inestabilidad* (medido por el conjunto  $I_\lambda(M)$ ).

Similarmente, se puede definir  $I_\lambda$  como explosiva en  $\lambda_0$ , siempre que exista un punto  $y \notin I_{\lambda_0}(M)$  tal que, para cualquier pareja de vecindades  $U$  y  $V$ , de  $M$  e  $y$  respectivamente, existe  $\lambda$  arbitrariamente cercano a  $\lambda_0$  tal que,  $I_\lambda(U) \cap V \neq \emptyset$ . Esta propiedad es de naturaleza general de semicontinuidad superior, pero otra vez, esto no está exactamente cubierto por este concepto.

Para demostrar que la inestabilidad puede ser de tipo explosivo, damos como un ejemplo la familia de ecuaciones diferenciales:  $\dot{x} = x^2[(x-1)^2 + \lambda]$ , tomando  $M = \{0\}$  y  $\Lambda = \mathbb{R}^+$ . Tenemos aquí  $I_0(M) = (0, 1]$ ,  $I_\lambda(0, \infty)$  ( $\lambda > 0$ ). Los conjuntos  $I_\lambda(M)$  "explota" cuando  $\lambda$  sale del valor 0.

## 2.4. Cambio de estabilidad y bifurcación

Ahora regresamos a la cuestión de cómo cambia el comportamiento de la estabilidad de un conjunto invariante compacto  $M$ , el cual, suponiendo que existe independientemente del parámetro  $\lambda$ , implique la ocurrencia de la bifurcación de  $M$ .

**2.4.1. Bifurcación en Sistemas Dinámicos.** Primero nos restringiremos al caso de una familia de sistemas dinámicos sobre un espacio métrico  $X$  localmente compacto.

**DEFINICIÓN 2.4.1.** Un conjunto invariante compacto  $M$  exhibe una *bifurcación extracrítica* en  $\lambda_0$ , si para cualquier pareja de vecindades  $U \in \mathcal{V}_M$  y  $N \in \mathcal{N}$ , existe un  $\lambda \in N$ ,  $\lambda \neq \lambda_0$ , y un conjunto compacto  $\lambda$ -invariante  $M_\lambda$  tal que  $M_\lambda \cap M = \emptyset$ ,  $y$ ,  $\emptyset \neq M_\lambda \subset U$ .

(Si  $\lambda$  es una variable real, este tipo de bifurcaciones se llaman supercrítica o ultracrítica, dado que los conjuntos  $M_\lambda$  surgen para  $\lambda > \lambda_0$ .)

**TEOREMA 2.4.2.** Sea  $F_\lambda$  una familia de sistemas dinámicos continuos sobre un espacio métrico  $X$  localmente compacto y sea  $M$  un conjunto compacto e invariante para cada uno de los sistemas  $F_\lambda$ , con  $\lambda$  en cierto conjunto  $\Lambda' \subset \Lambda$  tal que  $\lambda_0 \notin \Lambda'$ ,  $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}'$ , y supóngase que valen las siguientes condiciones:

- (i)  $M$  es inestable para  $\lambda = \lambda_0$  y es aislado de conjuntos invariantes cerrados.
- (ii)  $M$  es estable para toda  $\lambda \in \Lambda'$ .

- (iii)  $M$  es conexo y toda vecindad de  $M$  contiene una vecindad conexa de  $M$ . Entonces  $M$  exhibe una bifurcación extracrítica para  $\lambda \in \Lambda'$  en  $\lambda_0$ .

(El conjunto  $M$  se llama aislado de conjunto invariantes cerrados si existe una vecindad  $U$  de  $M$  tal que cualquier subconjunto invariante cerrado de  $U$  es un subconjunto de  $M$ .)

**Demostración.** No hay pérdida de generalidad al reemplazar “ $\lambda$  – estable” por “ $\lambda$ –asintóticamente estable” en la condición (ii). En realidad la estabilidad no asintótica implicaría la existencia de una sucesión de conjuntos cerrados  $\lambda_n$ – invariantes, que se aproximan a  $M$  cuando  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , implicando así, la existencia de una bifurcación extracrítica. Por lo tanto, suponemos la estabilidad  $\lambda$ –asintótica de  $M$  para cada  $\lambda$  especificada en (ii).

Primero, elegimos un punto  $\gamma \in I_{\lambda_0}(M)$  {existe por la hipótesis (i) y la Proposición 2.2.2}. Usando la condición (iii), elegimos una vecindad abierta y conexa  $U \in \mathcal{V}_M$ , que no contiene a  $\gamma$  en su cerradura. Siendo el espacio localmente compacto, podemos suponer que su cerradura  $\bar{U}$  es compacta. Sea  $W \in \mathcal{V}_\gamma$ , tal que

$$\bar{U} \cap W = \emptyset. \quad (2.1)$$

Ahora elegimos una pareja de vecindades  $\hat{U} \in \mathcal{V}_M$  y  $N \in \mathcal{N}$ , de acuerdo con la Proposición 2.3.1, tal que  $\bar{U} \subset U$ , y

$$(\forall \lambda \in N) \quad \gamma_\lambda^+(\hat{U}) \cap W \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

Sea  $\lambda \in N \cap \Lambda'$ . (Note que  $\lambda \neq \lambda_0$ , porque  $\lambda_0 \notin \Lambda'$ .)

Entonces, siendo  $M$   $\lambda$ –estable, podemos elegir una vecindad abierta  $V_\lambda \in \mathcal{V}_M$  tal que

$$\gamma_\lambda^+(V_\lambda) \subset U. \quad (2.3)$$

En seguida, definimos para cada  $\lambda$  dos subconjuntos de  $\hat{U}$  como sigue:

$$\hat{U}_\lambda^I := \{x \in \hat{U} \mid \gamma_\lambda^+(x) \subset U\}, \quad \hat{U}_\lambda^E := \{x \in \hat{U} \mid \gamma_\lambda^+(x) \not\subset \bar{U}\}.$$

Aquí,

$$\hat{U}_\lambda^I \neq \emptyset, \quad (2.4)$$

porque de acuerdo con (2.3),  $V_\lambda \subset \hat{U}_\lambda^I$ , y

$$\hat{U}_\lambda^E \neq \emptyset, \quad (2.5)$$

como consecuencia de (2.1) y (2.2).

Si existe bifurcación extracrítica de  $M$  para  $\lambda_0$ , existen vecindades  $N' \in \mathcal{N}$  y  $U' \in \mathcal{V}_M$  tal que para cualquier conjunto compacto  $\lambda$ –invariante contenido en  $U'$ , con  $\lambda \in N' \setminus \{\lambda_0\}$ , interseca a  $M$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $N' \supset N$  y  $U' \supset \bar{U}$ .

Usando la propiedad de atracción de  $M$ , se demuestra que  $\hat{U}_\lambda^I$  y  $\hat{U}_\lambda^E$  son conjuntos abiertos. Ambos conjuntos  $\hat{U}_\lambda^I$  y  $\hat{U}_\lambda^E$  son no vacíos [(2.4)

y (2.5)], ajenos, subconjuntos abiertos de  $\hat{U}$ , su unión no puede ser igual al conjunto total  $\hat{U}$ , el cual por la hipótesis (iii) se puede suponer conexo. Esto demuestra la existencia de un tercer conjunto  $\hat{U}_\lambda^C$  en  $\hat{U}$  que separa  $\hat{U}_\lambda^I$  de  $\hat{U}_\lambda^E$ , siendo ambos ajenos. Además,  $\hat{U}_\lambda^C$  consiste de puntos  $x$  para los cuales las  $\lambda$ -órbitas positivas  $\gamma_\lambda^+(x)$  no están contenidas en  $U$  ni entran al complemento de  $\bar{U}$ , pero hacen contacto con la frontera  $\partial U$  de  $U$  en uno o más puntos sin cruzarla, por esta razón les llamamos *órbitas de contacto* con respecto a  $\partial U$ .

Asociaremos con cada  $\lambda \in \Lambda'$ , un punto  $x_\lambda \in \hat{U}_\lambda^C$ . Entonces  $\gamma_\lambda^+(x_\lambda) \subset \bar{U}$ , y existe un  $t_\lambda > 0$  tal que  $F_\lambda^{t_\lambda}(x_\lambda) \in \partial U$ . Denotamos el punto  $F_\lambda^{t_\lambda}(x_\lambda)$  con  $y_\lambda$ .

Ahora, tomamos un sistema fundamental de vecindades  $U_n$  de  $M$  y una correspondiente sucesión de vecindades  $N_n$  de  $\lambda_0$ , tales que, vale (2.2) para  $\lambda_n \in N_n$  y  $\hat{U} = U_n$ . Para cada  $n$ , elegimos un punto  $x_n \in U_n^C$  y denotamos con  $t_n (> 0)$  y  $y_n$  el número y el punto con las propiedades

$$F_{\lambda_n}^{t_n}(x_n) \in \partial U, \quad F_{\lambda_n}^{[0, t_n)}(x_n) \in U.$$

La sucesión  $y_{\mathbb{N}}$  (o alguna subsucesión de esta) converge algún punto  $y^* \in U$ , el espacio es localmente compacto. Se sigue que la órbita  $\gamma_{\lambda_0}(y^*)$  pertenece a  $\bar{U}$  por que este último conjunto es invariante. Por otra parte, también es ajeno de  $M$ . Puesto que  $U$  se ha elegido arbitrariamente pequeña, hemos llegado a una contradicción con (i). Esto demuestra la existencia de una bifurcación extracrítica.  $\square$

**EJEMPLO 5.** Para ilustrar esto consideremos una familia de sistemas dinámicos (local) definido por:  $\dot{x} = \lambda y - x^3$ ,  $\dot{y} = -\lambda x - \lambda y + y^3$ .

Para  $\lambda = 0$ , el origen es un punto silla, por lo tanto, es aislado de conjuntos compactos invariantes. Para  $\lambda > 0$ , el origen es, localmente un foco estable. Entonces se sigue del Teorema 2.4.2 que el origen exhibe una bifurcación postcrítica en  $\lambda = 0$ .

**2.4.2. Bifurcación en Sistemas Semidinámicos.** Ahora, consideremos el caso más general de una familia  $F_\Lambda$  de sistemas semidinámicos sobre un espacio métrico arbitrario  $X$ . Con la finalidad de extender el Teorema precedente a este caso, tenemos que suponer la propiedad compacidad asintótica local (LAC) para  $F_\Lambda$ , la cual se define como sigue.

**DEFINICIÓN 2.4.3.** Una familia de sistemas semidinámicos  $F_\Lambda$  es *localmente asintóticamente compacto (LAC)* en un conjunto  $A$  y en el valor  $\lambda_0$  de  $\lambda$ , si para cualquier terna de sucesiones,  $x_{\mathbb{N}}$ ,  $t_{\mathbb{N}}$ ,  $\lambda_{\mathbb{N}}$ , tales que  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , y  $F_{\lambda_n}^{[0, t_n)}(x_n) \subset A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\{F_{\lambda_n}^{t_n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacto.

Adaptaremos el concepto de bifurcación extracrítica al presente contexto, de acuerdo a la siguiente definición.



**DEFINICIÓN 2.4.4.** Un conjunto compacto  $M \subset X$  que es  $\lambda$ -invariante para toda  $\lambda \in \Lambda$  se dice que exhibe una *bifurcación extracrítica* en  $\lambda_0 \in \Lambda$ , para una familia de sistemas semidinámicos  $F_\Lambda$ , si para cualquier pareja de vecindades  $U \in \mathcal{V}_M$  y  $N \in \mathcal{N}$  existe un  $\lambda \in N$ ,  $\lambda \neq \lambda_0$ , y una  $\lambda$ -semiórbita positiva cuya cerradura está contenida en  $U \setminus M$ .

Entonces el Teorema 2.4.2 queda de la siguiente forma:

**TEOREMA 2.4.5.** [21] *Sea  $F_\Lambda$  una familia de sistemas semidinámicos continuos sobre un espacio métrico  $X$ , y suponga que  $F_\Lambda$  es LAC sobre alguna vecindad  $U$  de algún subconjunto compacto  $M$  de  $X$ , el cual es  $\lambda$ -invariante para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Supongamos además, que se cumplen las hipótesis (i)-(iii) del Teorema 2.4.2. Entonces  $M$  exhibe una bifurcación extracrítica en  $\lambda_0$ .*

*{Si las hipótesis son válidas para algún subconjunto  $\Lambda'$  de  $\Lambda$  ( $\lambda_0 \in \overline{\Lambda'}$ ), restringimos el espacio de parámetros a  $\Lambda' \cup \{\lambda_0\}$ .}*

### 2.5. La bifurcación de Hopf generalizada

Un caso especial e importante de la situación considerada en esta sección surge cuando  $M$  es *completamente inestable* (también llamado *repulsor*) para  $\lambda = \lambda_0$ , y asintóticamente estable para ciertos valores  $\lambda_n$  que se acumulan en  $\lambda_0$ . Con la orientación de la escala del tiempo invertida, este es el caso estudiado en [14]. (Ahí, el conjunto  $M$  se supone que depende de  $\lambda$ .) En particular, este contiene la clásica *bifurcación de Hopf* (en el caso donde todos los eigenvalores de la parte lineal, excepto dos que son imaginarios, tienen partes reales estrictamente negativas).

El presente enfoque no cubre todos los resultados de [14], y sus extensiones en [19], tal como la estabilidad asintótica de los nuevos conjuntos invariantes que se bifurcan. Para estos puntos más finos, es más apropiado el enfoque utilizado en el trabajo [14], basado en una propiedad de la persistencia de la estabilidad asintótica. Volveremos sobre este aspecto de la teoría en el capítulo 3.



## Equiestabilidad y bifurcación

El contexto general de esta teoría es el mismo que el de la sección precedente.

**3.0.1. Equiestabilidad, equiestabilidad relativa y equiestabilidad conexo relativa de una familia de atractores.** En la presente sección,  $\Lambda'$  denota un subconjunto de  $\Lambda$  tal que  $\lambda_0 \notin \Lambda'$ , pero  $\lambda_0 \in \overline{\Lambda'}$ .

DEFINICIÓN 3.0.1. El conjunto  $M$  es *equiestable* (abreviado ES) en  $\lambda_0$  con respecto a la familia de sistemas  $F_{\Lambda'}$ , si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda \in \Lambda') \quad d(x, M) < \delta \Rightarrow \gamma_{\lambda}^+(x) \subset B_{\epsilon}(M).$$

Un conjunto  $M$  es un *atractor* (llamado por algunos autores *conjunto de atracción*) y  $A \subset X$  es su *región de atracción*, si  $A$  es una vecindad de  $M$  y este es el conjunto de todos los puntos  $x \in X$  con la propiedad:

$$d(F^t(x), M) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Si todos los elementos  $F_{\lambda}$  de una familia de sistemas  $F_{\Lambda'}$  tienen el mismo atractor  $M$ , pero con diferentes regiones de atracción,  $A_{\lambda}$ , denotamos la familia de atractores con  $(M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'})$ .

DEFINICIÓN 3.0.2. La familia de atractores  $(M, A_{\Lambda'}, F_{\Lambda'})$  es *relativamente equiestable*(RES) si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda \in \Lambda') \quad \gamma_{\lambda}^+(B_{\delta}(M) \cap A_{\lambda}) \subset B_{\epsilon}(M). \quad (3.1)$$

EJEMPLO 6. Consideremos la familia de sistemas:

$$\dot{y} = y(y^2 - \lambda^2), \quad \dot{z} = -z, \quad (y, z, \lambda \in \mathbb{R}),$$

y elegimos como el conjunto invariante común  $M$  el origen  $\{(0, 0)\}$  del plano. El conjunto  $M$ , es asintóticamente estable para todo  $\lambda \neq 0$  y las correspondientes regiones de atracción son  $A_{\lambda} = \{(y, z) \mid |y| < \lambda\}$ . Elegimos una norma en  $\mathbb{R}^2$  :  $\|(y, z)\| = \max\{|y|, |z|\}$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\|(y, z)\| < \delta$  implica  $\|F_{\lambda}^t(y, z)\| < \epsilon$  ( $t \geq 0$ ) si y sólo si  $\delta < \min(\epsilon, \lambda)$ . La última expresión tiende a 0 cuando  $\lambda \rightarrow 0$ ; por lo tanto,  $M$  no es ES en  $\lambda = 0$ .

Por otro lado, para toda  $\delta > 0$  y  $\lambda' \neq 0$ ,  $B_\delta(M) \cap A_{\lambda'} = \{(y, z) \mid |y| < \min(\delta, \lambda'), |z| < \delta\} \subset A_{\lambda'}$ . Puesto que  $|y|$  y  $|z|$  decrecen monotónicamente bajo  $F_{\lambda'}$  adentro de  $A_{\lambda'}$ , los conjuntos  $B_\delta(M) \cap A_{\lambda'}$  son positivamente invariantes. Por lo tanto, en (3.1), podemos elegir  $\delta = \epsilon$ . Consecuentemente, la familia correspondiente de atractores  $(M, A_{\lambda'}, F_{\lambda'})$ ,  $\Lambda' = \mathbb{R} \setminus M$  es RES.

EJEMPLO 7. Consideremos la familia de sistemas lineales (bifurcación lineal de co-dimensión dos):  $\dot{y} = z$ ,  $\dot{z} = -\lambda y - \lambda z$ ,  $(y, z \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^+)$ .

Para valores positivos pequeños y positivos de  $\lambda$ , el origen  $M = \{(0, 0)\}$  es un foco estable. Además, cálculos de rutina revelan que cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , las espirales que son las que forman las soluciones no triviales se aplanan en la dirección del eje  $z$ , mientras que se alarga en la dirección del eje  $y$ . El primer hecho es una consecuencia de que  $\dot{z}$  tiende a 0 junto con  $\lambda$ , mientras que la segunda también se sigue de la Proposición 2.3.1, por que  $I_0(M)$  es el eje  $y$ . Esto implica que, para algunos  $\delta > 0$  y  $\epsilon > 0$  dados, existen, para  $\lambda$  suficientemente pequeña,  $\lambda$ -semiórbitas con puntos iniciales en la  $B_\delta(M)$  que abandonan la  $\epsilon$ -vecindad esférica,  $B_\epsilon(M)$ . Siendo la región de atracción todo el plano, por lo tanto la familia de atractores no es RES.

DEFINICIÓN 3.0.3. La familia de atractores  $(M, A'_\lambda, F'_\lambda)$  es *conexo relativamente equiestable*(CRES) si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda \in \Lambda') \quad \gamma_\lambda^+(A_{\lambda, \delta}^*) \subset B_\epsilon(M), \quad (3.2)$$

donde  $A_{\lambda, \delta}^*$  denota la componente conexa de  $B_\delta(M) \cap A_\lambda$  que contiene a  $M$  (suponiendo que esta sea conexa).

Entonces,

$$ES \Rightarrow RES \Rightarrow CRES.$$

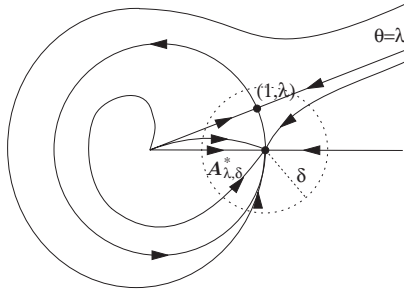
Damos en el siguiente ejemplo una familia de atractores que es CRES pero no RES.

EJEMPLO 8. Consideremos la familia de sistema de ecuaciones diferenciales (en coordenadas polares):

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \lambda}{2}\right), \quad (\text{para } r > 0, \lambda \geq 0).$$

El punto de equilibrio  $r = 1, \theta = 0$  es asintóticamente estable para  $\lambda > 0$  y atrae a todo el plano excepto el rayo  $\theta = \lambda$  (incluyendo el origen). Denotamos el atractor con  $P$  y fijamos dos constantes  $\epsilon > 0$  y  $\delta \in (0, \epsilon)$ . Para  $\lambda$  pequeño, algunas de las órbitas emanadas desde  $B_\delta(P) \cap A_\lambda$  no permanecen adentro de  $B_\epsilon(P)$ . Esto excluye la propiedad RES. Sin embargo, las semiórbitas que comienzan en  $A_{\lambda, \delta}^*$  (por abajo

del rayo  $\theta = \lambda$  permanecen adentro de  $B_\epsilon(P)$  (ver Figura 3.1). Esto demuestra que la familia de atractores es CRES.



**Figure 3.1.** Ilustración del Ejemplo 8, se muestra de una familia de atractores que tiene la propiedad CRES pero no tiene la propiedad RES.

Un caso ilustrativo de una familia de atractores no-CRES es el Ejemplo 7. (Aquí el conjunto  $A_{\lambda, \delta}^*$  coincide con  $B_\delta(M)$ ).

### 3.1. Equiestabilidad y pérdida crítica de la estabilidad

**PROPOSICIÓN 3.1.1.** *Sea  $M \subset X$  un conjunto compacto, equiestable en  $\lambda_0$  con respecto al familia  $F'_\Lambda$ ,  $\Lambda' \subset \Lambda$ , y  $\lambda_0 \notin \Lambda'$ . Entonces  $M$  es  $\lambda_0$ -estable.*

La demostración es una consecuencia de la continuidad de  $F$ . La converso de esta proposición no es verdadera, como lo demuestra el ejemplo que sigue.

**EJEMPLO 9.** Sea la familia de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\dot{y} = \lambda z, \quad \dot{z} = -\lambda^2 y - \lambda^2 z,$$

$M = \{(0, 0)\}$ ,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\Lambda' = (0, \infty)$ . Para  $\lambda > 0$  el retrato fase es el mismo que el del Ejemplo 7 (en el que este se puede transformar mediante un cambio de la variable independiente  $t$ ), y por lo tanto no es equiestable. Por otra parte, para  $\lambda = 0$ , el origen es estable.

**DEFINICIÓN 3.1.2.** Un conjunto compacto  $M$   $\lambda_0$ -invariante exhibe una *bifurcación crítica* (también llamada *bifurcación vertical*) en  $\lambda_0$ , si es invariante y aislado de conjuntos cerrados débilmente invariantes para valores de  $\lambda$  que se acumulan en  $\lambda_0$  y cada vecindad de  $M$  contiene un conjunto cerrado débilmente  $\lambda_0$ -invariante ajeno de  $M$ .

{Un conjunto es *débilmente invariante*, si a través de cada uno de sus puntos existe una órbita maximal, (i.e., que no puede ser extendida), contenida en el conjunto. En el caso de un sistema dinámico, este concepto se reduce, al de conjunto invariante.}

**COROLARIO 3.1.3.** [3] *Supóngase que el conjunto compacto  $M \subset X$  es asintóticamente estable para cada  $\lambda' \in \Lambda'$ , donde  $\Lambda' \subset \Lambda$ ,  $\lambda_0 \in \overline{\Lambda'}$ ;  $\lambda_0 \notin \Lambda'$ , pero no asintóticamente estable para  $\lambda = \lambda_0$ , y que  $M$  es equiestable en  $\lambda_0$  con respecto a la familia  $F_{\Lambda'}$ . Supóngase además que  $F_{\lambda_0}$  es LAC en alguna vecindad de  $M$ . Entonces  $M$  exhibe una bifurcación crítica en  $\lambda_0$ .*

(Si el espacio es localmente compacto, la propiedad LAC es redundante.)

Esto es una consecuencia de la proposición precedente y de hechos básicos de sistemas semidinámicos (ver por ejemplo, [16], Cap.II, teoremas 3.5 y 6.7. ).

Los casos típicos son los de la transición de un nodo estable a un centro,  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x - \lambda y$  ( $\lambda \geq 0$ ), y la ecuación de van der Pol,  $\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$  ( $\lambda \geq 0$ ), o su equivalente cualitativo, (en coordenadas polares)  $\dot{r} = \lambda r(1 - r)$ ,  $\dot{\theta} = 1$ , el cual, tiene un ciclo límite independiente de  $\lambda (> 0)$ , estos son algunos ejemplos prototipo que mejor encajan en nuestro contexto.

### 3.2. La propiedad CRES y la bifurcación extracrítica

En esta sección formulamos una condición suficiente para la ocurrencia de una bifurcación extracrítica que involucra la propiedad CRES.

**TEOREMA 3.2.1.** [3] *Sea  $F_{\Lambda}$  una familia de sistemas semidinámicos definidos sobre un espacio métrico  $X$  localmente conexo. Suponga que existe un conjunto  $M \subset X$  compacto, conexo el cual es  $\lambda$ -invariante para cada  $\lambda \in \Lambda$ , y cada  $F_{\lambda}$  es LAC en alguna vecindad de  $M$ . Supongamos además que  $M$  es inestable para  $\lambda = \lambda_0$  y estable para cada  $\lambda \in \Lambda' \subset \Lambda$ , donde  $\lambda_0 \in \overline{\Lambda'}$ , y que se cumple la propiedad CRES. Entonces  $M$  exhibe una bifurcación extracrítica para  $\lambda = \lambda_0$ .*

**Demostración.** Como en el Teorema 2.2, no hay pérdida de generalidad si suponemos que  $M$  es asintóticamente estable para  $\lambda \in \Lambda'$ .

De la Proposición 2.2.2 se sigue que  $I_{\lambda_0}(M)$  no es vacío. Elegimos un punto  $y \in I_{\lambda_0}(M)$  y una pareja de vecindades  $U \in \mathcal{V}_M$  y  $V \in \mathcal{V}_y$ , respectivamente. Luego, elegimos un  $\delta > 0$  como en la Definición 3.0.3, siendo  $\epsilon > 0$  y tal que  $B_{\epsilon}(M) \subset U$ .

Habiendo supuesto que el espacio es localmente conexo, la vecindad  $B_{\delta}(M)$  contiene una vecindad conexa  $U_{\delta} \in \mathcal{V}_M$ , que es cerrada con

respecto a  $B_\delta(M)$ . Después, fijamos  $\lambda \in \Lambda'$  tal que:  $\gamma_\lambda^+(B_\delta(M)) \cap V \neq \emptyset$ . Entonces existen dos posibles, que dependen si:  $\gamma \in A_\lambda$ , o  $\gamma \notin A_\lambda$ . En el primer caso, cualquier punto  $x \in U_\delta$ , tal que

$$\gamma_\lambda^+(x) \cap V \neq \emptyset, \tag{3.3}$$

necesariamente estaría en alguna componente conexa de  $U_\delta \cap A_\lambda$  no conteniendo  $M$ , por la propiedad CRES y la elección de  $\delta$ . En tal caso se puede probar, usando la propiedad LAC, que  $M$  exhibe una bifurcación en  $\lambda_0$ .

Se podría notar que este caso solamente puede ocurrir cuando no se cumple la propiedad RES.

Ahora regresamos al segundo caso, que es el principal, por la única razón mencionada. Por simplicidad, suponemos que vale la condición RES. Otra vez elegimos un punto  $x \in U_\delta$  que satisface (3.3). Si  $\gamma \notin \overline{A_\lambda}$ , podemos suponer  $V \cap A_\lambda = \emptyset$ .

Entonces, obviamente,  $x \notin A_\lambda$ ; siendo  $A_\lambda$  y  $U_\delta$  vecindades conexas de  $M$  se sigue que  $\partial A_\lambda \cap U_\delta \neq \emptyset$ . Sea  $z$  el punto de intersección, entonces la propiedad RES implica  $\gamma_\lambda^+(z) \subset B_\epsilon(M)$ , por lo tanto existe una bifurcación extracrítica.  $\square$

En los Ejemplos 6 y 8, donde las familias de atractores son CRES, existe bifurcación extracrítica.

### 3.3. Las familias de atractores no-CRES y las bifurcaciones débilmente críticas

**DEFINICIÓN 3.3.1.** Un conjunto  $M$  invariante y cerrado exhibe una *bifurcación débilmente crítica* con respecto a una familia de sistemas  $F_\Lambda$  en  $\lambda_0 \in \Lambda$ , si cada una de sus vecindades contiene un conjunto cerrado  $M'$  débilmente  $\lambda_0$ -invariante no contenido en  $M$ , mientras, para cada  $\lambda$  en un subconjunto  $\Lambda'$  de  $\Lambda$ , que se acumulan en  $\lambda_0$ ,  $M$  es aislado de conjuntos positivamente invariantes. {Si, en particular,  $M' \cap M = \emptyset$ , el concepto se reduce al de bifurcación crítica (Definición 3.1.2).}

**TEOREMA 3.3.2.** [3] *Con las mismas hipótesis del Teorema 2.1, excepto que no suponemos que  $M$  sea  $\lambda_0$ -inestable y reemplazamos la propiedad CRES por su opuesta no-CRES.*

*Entonces  $M$  exhibe una bifurcación (posiblemente débilmente) crítica. Además existe una órbita principal para  $F_{\lambda_0}$ .*

**Demostración.** Primero fijamos un  $\epsilon > 0$ , y para cada  $\delta > 0$  elegimos un  $\lambda \in \Lambda'$  tal que vale la negación de la relación de inclusión de la Definición 3.0.3. Luego, definimos dos subconjuntos de  $A_{\lambda,\delta}^*$ , análogos a los conjuntos  $\hat{U}_\lambda^I$  y  $\hat{U}_\lambda^E$ , y mediante argumentos a los utilizados en la demostración del Teorema 3.2.1, demostramos la existencia de una órbita de contacto  $\gamma_\lambda^+(x_\lambda)$ , con  $x_\lambda \in A_{\lambda,\delta}^*$ . Esta órbita intersecta al

conjunto  $S_\epsilon(M)$  en algún “punto de contacto”  $\gamma_\lambda(x)$ . Eligiendo una sucesión  $\delta_{\mathbb{N}}$ , con  $\delta_n \rightarrow 0$  y una correspondiente sucesión  $\delta_{\mathbb{N}}$ , con  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , denotamos los correspondientes puntos de contacto con  $\gamma_n$ . La propiedad LAC, implica que la sucesión  $\gamma_{\mathbb{N}}$  tiene un punto de cerradura  $\gamma^*$  en  $S_\epsilon(M)$ . Entonces se puede construir una órbita principal (i.e, definida para todos los valores de  $t$ ) a través de  $\gamma^*$ . Esta órbita principal está contenida en el conjunto  $\overline{B_\epsilon(M)}$ . Puesto que  $\epsilon$  se puede tomar arbitrariamente pequeño, y la cerradura de la órbita principal es débilmente invariante, esto demuestra la existencia de una bifurcación (posiblemente débilmente) crítica. Además, se ha establecido que existen órbitas principales que se acumulan en  $M$ .  $\square$

En el Ejemplo 7, donde la familia de atractores es no-CRES, el sistema se reduce a  $\dot{y} = z$ ,  $\dot{z} = 0$ , exhibiendo un continuo de puntos críticos. Esta situación corresponde (en el sentido estricto) a una bifurcación crítica.

### 3.4. Ejemplos diversos

**3.4.1. Familia de sistemas de ecuaciones diferenciales.** Considere la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \lambda y + xy, \quad \dot{y} = -\lambda x - \lambda y + y^2 - x^2. \quad (3.4)$$

Para  $\lambda > 0$ , el origen es asintóticamente estable; para  $\lambda = 0$ , un análisis geométrico revela que todas las órbitas en los dos semiplanos  $x > 0$  y  $x < 0$  son homoclínicas, luego, representa una bifurcación débilmente crítica. Además de acuerdo con el Teorema 3.2.1, la familia de atractores correspondiente a  $\lambda > 0$ , es no-CRES para  $\lambda \rightarrow 0$ .

**3.4.2. Familia de sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo.** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, donde una de ellas depende de un parámetro escalar  $\lambda$ , e involucra una acción retardada sobre la otra:

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) + x(t)\gamma(t-1), \quad \dot{y}(t) = y^3(t) + (x^2(t) - \lambda)y(t) \quad (3.5)$$

con  $\lambda \geq 0$ . Para aplicar nuestra teoría, consideramos el sistema semidinámico definido por (3.5) sobre el espacio  $Z^* = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$  en el siguiente sentido, dada una función inicial  $\psi \in Z^*$ , sea  $z(\cdot) = (x(\cdot), \gamma(\cdot))$  la correspondiente solución de (3.5)  $\{x(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ , depende, por supuesto solamente de  $\psi(0)$  }. Entonces denotamos con  $z_t$  la función definida por

$$z_t(\theta) = z(t + \theta), \quad \theta \in [-1, 0],$$

con  $t$  en el intervalo maximal  $I_\psi = [0, t_\psi)$  para el cual existe la solución, y definimos el semigrupo local de transformaciones  $F^{t_\psi}$  mediante

$$F^{t'}(z_t) = z_{t+t'} \quad (t + t' \in I_\psi);$$



en particular,  $z_0 = \psi$ . Denotaremos los puntos del espacio  $Z^*$  con  $z^*$ , y el origen de  $Z^*$  (la función idénticamente cero) con  $o^*$ , y escribimos  $Z^*$  como la suma directa  $Z^* = X^* \oplus Y^*$ , donde cada uno de los espacios  $X^*$  y  $Y^*$ , es una réplica de  $C([-1, 0], \mathbb{R})$ , denotando sus elementos con  $x^*$  y  $y^*$ , respectivamente. Sobre los tres espacios introducimos las normas

$$\|Z^*\| = \sup\{|Z(\theta)| : \theta \in [-1, 0]\},$$

$z^*$  y  $y^*$  análogamente. Aquí  $|z(\theta)|$  se define como  $|z(\theta)| + |y(\theta)|$ . Definiendo  $y_t$  exactamente igual que  $z_t$ , la primera ecuación del sistema (3.5) se transforma en

$$\dot{x}(t) = -x^3(t) + x(t)y_t$$

mientras que la segunda ecuación del mismo sistema queda igual. Entonces el semigrupo local  $F^{I_\psi}$  define un sistema semidiámico local sobre el espacio  $Z^*$  (ver por ejemplo [4]). Para poder aplicar el el Teorema 3.2.1 al caso presente, definimos como conjunto  $M$  el origen del espacio  $Z^*$ . La propiedad LAC se deduce de manera directa del Teorema de Arzelà-Ascoli. Para  $\lambda = 0$ ,  $o^*$  es inestable y aislado; es en realidad un punto silla, por lo tanto se excluye una bifurcación débilmente crítica. Para  $\lambda > 0$ , se puede demostrar que  $o^*$  es estable, aplicando, por ejemplo, el Teorema 3.4 en [20] el cual establece: *Si el conjunto  $M$  compacto y positivamente invariante es un atractor uniforme relativo a un conjunto invariante cerrado y positivamente invariante  $Y$ , que contiene a  $M$ , y  $Y$  es localmente estable cerca de  $M$ , entonces  $M$  es estable.* Aquí, que  $M$  sea un atractor uniforme relativo a  $Y$  significa que

$$(\exists \sigma > 0)(\forall \epsilon > 0)(\exists \tau > 0) \quad F_\tau(B_\sigma(M) \cap Y) \subset B_\epsilon(M),$$

y la estabilidad local de  $Y$  cerca de  $M$  significa que existe una vecindad  $U \in \mathcal{V}_M$  tal que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x \in B_\delta(M)) \quad F^{[0,t]}(x) \subset F^{[0,t]}(x) \subset B_\epsilon(Y).$$

En nuestro ejemplo, los conjuntos  $Y$  y  $M$  son  $X^*$  y  $\{o^*\}$  respectivamente. El origen  $o^*$ , relativo a  $X^*$ , es uniformemente asintóticamente estable, por lo tanto se cumple la primera hipótesis del Teorema 3.4 en [20]. Queda por demostrar que  $X^*$  es localmente estable cerca de  $o^*$ . Esto se puede obtener utilizando la función semidefinida de Lyapunov  $v(y) = y^2$ .

La existencia de una bifurcación extracrítica se sigue entonces del Teorema 3.2.1.

### 3.4.3. Familia de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

En el siguiente ejemplo haremos uso del Corolario 5.7 de [17], concerniente a la teoría de reducción de estabilidad, para verificar la hipótesis de estabilidad asintótica de un punto de equilibrio en el

estudio de su bifurcación cuando el parámetro es distinto de su valor crítico. En el contexto actual, el corolario citado se reduce al siguiente:

**COROLARIO 3.4.1.** *Sea  $F$  un sistema semidinámico sobre un espacio métrico  $X$ ; supongamos que los conjuntos  $M, Y \subset X$  son cerrados, no vacíos, positivamente invariantes, y además, que se cumplen las siguientes hipótesis:*

- (i)  $Y$  es uniformemente estable:  $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \gamma^+(B_\delta(Y)) \subset B_\epsilon(Y)$ ;
- (ii)  $Y$  es  $\mathcal{B}$ -atractor:  $(\forall A \in \mathcal{B})(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A) \subset B_\epsilon(Y)$ , donde  $\mathcal{B}$  es la familia de subconjuntos acotados de  $X$ ;
- (iii)  $M$  es  $\mathcal{B}'_Y$ -atractor:

$$(\forall A_Y \in \mathcal{B}'_Y)(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A_Y) \subset B_\epsilon(M),$$

donde  $\mathcal{B}'_Y$  es la familia de subconjuntos de  $X$ , de distancia acotada respecto a  $Y$ ;

- (iv) el sistema semidinámico (o semigrupo),  $F$  es  $\mathcal{B}$ -acotado, es decir

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\exists \beta > 0) \quad \gamma^+(A) \subset B_\beta(M).$$

Entonces  $M$  es  $\mathcal{B}$ -globalmente asintóticamente estable, o sea,

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\forall \epsilon > 0)(\exists t > 0) \quad F^{[t, +\infty)}(A) \subset B_\epsilon(M)$$

y además  $M$  es estable.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, acoplado y dependiente del parámetro  $\lambda$ , esta familia de sistemas define una familia de atractores no CRES y exhibe una bifurcación crítica.

$$u_t = \lambda u_{xx}, \quad v_t = \lambda v_{xx} + uv, \quad (0 < x < 1) \quad (\lambda > 0). \quad (3.6)$$

Ponemos condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad (t \geq 0),$$

y condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad v(x, 0) = \psi_0(x), \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (3.7)$$

con  $\varphi_0, \psi_0 \in \mathcal{H}_0$ . El sistema está bien planteado para  $X = \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ , donde

$$\mathcal{H}_0 := \{ \chi \in L^2(0, 1) \mid \chi, \chi' \text{ son absolutamente continuas,} \\ \chi'' \in L^2(0, 1) \text{ and } \chi(0) = \chi(1) = 0 \}.$$

En lo que sigue, para simplificar la notación escribiremos  $L^2$  en lugar de  $L^2(0, 1)$ .

Tenemos que  $X$  es un espacio lineal normado, con norma

$$\|(\varphi, \psi)\|_X := \|\varphi\|_{\mathcal{H}_0} + \|\psi\|_{L^2}, \quad \text{y} \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}_0} := \|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi''\|_{L^2}.$$

El conjunto de parámetros para este caso es  $\Lambda = \mathbb{R}^+$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda$  la  $\lambda$ -solución  $(u_\lambda, v_\lambda)$ , donde  $u_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , del sistema de ecuaciones (3.6) está dada explícitamente por

$$u_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \varphi_0, \quad v_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \psi_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)A} (Kv_\lambda)(\tau) d\tau, \quad (3.8)$$

donde  $(Kv_\lambda)(t) := (u_\lambda v_\lambda)(t) \in \mathcal{H}_o$ , las funciones  $\varphi_0$  y  $\psi_0$  se interpretan, en la aplicación física más común como distribuciones iniciales de temperatura, dadas en (3.7), y finalmente  $A$  es el operador  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ , con dominio  $D(A) = \mathcal{H}_o$ . En el contexto actual escribiremos, para cada  $\lambda$ ,  $F_\lambda^t(\varphi, \psi) := (u_\lambda, v_\lambda)(t)$ , para definir una familia de sistemas semidinámicos en el espacio  $X$ .

Consideremos los conjuntos,

$$Y = \{(\varphi, \psi) | \varphi = 0\}, \quad M = \{(\varphi, \psi) | \varphi = 0, \psi = 0\},$$

del espacio  $X$ . Puesto que cada elemento de la familia de semigrupos  $\{e^{-\lambda t A} | \lambda \in \Lambda\}$  es un semigrupo contractivo en  $L^2(0, 1)$ , también, para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$Lv_\lambda = e^{-\lambda t A} \psi + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)A} (Kv_\lambda)(\tau) d\tau,$$

define un operador contractivo en  $C([0, t], \mathcal{H}_o)$  para  $t$  pequeña. Entonces tenemos que para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v_\lambda$  está bien definida para cada  $t > 0$ .

A continuación vamos a verificar las hipótesis del Corolario 3.4.1 para cada  $\lambda \in \Lambda$ .

(i)  $Y$  es  $\lambda$ -uniformemente estable.

Dado  $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}_o$ , tenemos que

$$u_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} c_m \sin m\pi x, \quad (3.9)$$

$$c_m = 2 \int_0^1 \varphi(s) \sin m\pi s ds. \quad (3.10)$$

Entonces  $u_\lambda(x, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , uniformemente en  $x$ , porque  $\|u_\lambda(x, t)\|_\infty := \sup_{x \in (0,1)} |u_\lambda(x, t)|$  decrece monótonamente como función de  $t$ , para cada  $\lambda > 0$ . Por lo tanto,  $(u_\lambda, v_\lambda) \rightarrow (0, v_\lambda)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  uniformemente en  $X$ .

- (ii) El conjunto  $Y$  es  $\mathcal{B}$ -atractor uniforme en  $X$ . Esto se demuestra con el mismo argumento que en (i).
- (iii) El conjunto  $M$  es  $\mathcal{B}_Y$ -atractor uniforme en  $Y$ . En efecto, para  $F_\lambda^t(\varphi, \psi) \in Y$ ,  $u_\lambda = 0$ . Por lo tanto, (3.8) implica que, dado

$\psi \in \mathcal{H}_0$ ,

$$v_\lambda(x, t) = e^{-\lambda t A} \psi = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} d_m \sin m \pi x, \quad \text{con}$$

$$d_m = 2 \int_0^1 \psi(s) \sin m \pi s ds.$$

Entonces  $v_\lambda(x, t) \rightarrow M$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  uniformemente en  $Y$ .

- (iv) Finalmente, vamos a demostrar que el sistema semidinámico,  $F_\lambda$  es  $\mathcal{B}$ -acotado.

Las órbitas con puntos iniciales en conjuntos acotados están acotadas. Para esto, demostraremos que las órbitas están uniformemente acotadas sobre conjuntos acotados. En efecto, supongamos que

$$\|(\varphi, \psi)\|_X \leq R \text{ para alguna } R > 0,$$

y consideremos la solución  $F_\lambda^t(\varphi, \psi) := (u_\lambda, v_\lambda)$  del sistema (3.6) con  $u_\lambda(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $v_\lambda(x, 0) = \psi(x)$ , y la función,

$$w_\lambda(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 v_\lambda^2 dx. \quad (3.11)$$

Derivando con respecto a  $t$ , e integrando por partes, obtenemos

$$\dot{w}_\lambda(t) \leq \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx. \quad (3.12)$$

Por otro lado,

$$u_\lambda \leq |u_\lambda| \leq \|u_\lambda\|_\infty = \sup_{x \in (0,1)} |u_\lambda(x, t)|, \quad (3.13)$$

entonces

$$\int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx \leq \int_0^1 |u_\lambda| v_\lambda^2 dx \leq \|u_\lambda\|_\infty \int_0^1 v_\lambda^2 dx \quad (3.14)$$

Aplicando (3.13) y (3.14) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\dot{w}_\lambda(t) = \int_0^1 -\lambda v_{\lambda x}^2 dx + \int_0^1 u_\lambda v_\lambda^2 dx \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_\lambda^2) dx. \quad (3.15)$$

Haremos una estimación de  $\|u_\lambda(x, t)\|_\infty$ . Considerando las ecuaciones (3.9) y (3.10), obtenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t} |c_m|. \quad (3.16)$$

En la ecuación anterior acotaremos el coeficiente de Fourier,  $|c_m|$ . Nuevamente integrando por partes dos veces  $c_m = 2 \int_0^1 \varphi(s) \sin \pi s ds =$

$-\frac{2}{m^2\pi^2} \int_0^1 \varphi''(s) \sin m\pi s ds$ , de aquí, utilizando la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^1 |\varphi''(s)| ds \leq \|\varphi''\|_{L^2},$$

obtenemos finalmente una cota para los coeficientes  $|c_m|$

$$|c_m| \leq \frac{2}{m^2\pi^2} \int_0^1 |\varphi''(s)| ds \leq \frac{2\|\varphi''\|_{L^2}}{m^2\pi^2},$$

como consecuencia tenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\|\varphi''\|_{L^2} e^{-\lambda m^2 \pi^2 t}}{m^2 \pi^2} \leq \frac{2\|\varphi''\|_{L^2}}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \quad (3.17)$$

Pero,  $\|\varphi''\|_{L^2} \leq R$  y  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi}{6}$ , entonces

$$\|u_\lambda(x, t)\|_\infty \leq \frac{R}{3\pi}. \quad (3.18)$$

De (3.11), (3.12) y (3.18) tenemos

$$\dot{w}_\lambda(x, t) \leq \frac{2R}{3\pi} w_\lambda(x, t) \quad (3.19)$$

de donde concluimos que

$$w_\lambda(t) \leq e^{\frac{R}{3\pi}t} w_\lambda(0) \leq \frac{R^2}{3\pi} e^{\frac{R}{3\pi}t}, \quad t > 0. \quad (3.20)$$

La desigualdad (3.20) significa que la función  $w_\lambda(t)$  correspondiente a la mitad del cuadrado de la norma  $v_\lambda(x, t)$ , es de orden exponencial para cualquier función inicial  $\psi$  acotada.

Demostremos que para cada  $t$  suficientemente grande,  $\dot{w}_\lambda(x, t) \leq 0$ , pero antes, considerando la integral

$$v_\lambda(x, t) = \int_0^1 v_{\lambda s}(s, t) ds, \quad (3.21)$$

elevando al cuadrado ambos lados de (3.21) y aplicando la desigualdad de Schwartz obtenemos

$$v_\lambda^2(x, t) \leq \int_0^1 v_{\lambda s}^2(s, t) ds, \quad (3.22)$$

luego, integrando ambos lados de (3.22) sobre el intervalo  $[0, 1]$ , concluimos que

$$\int_0^1 v_\lambda^2(x, t) dx \leq \int_0^1 v_{\lambda x}^2(x, t) dx, \quad (3.23)$$

Para cada  $t$ , derivando  $w_\lambda(t)$ , integrando por partes, y aplicando las desigualdades (3.23) y (3.15) tenemos  $\dot{w}_\lambda(t) \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_\lambda^2) dx \leq \int_0^1 (-\lambda v_{\lambda x}^2 + \|u_\lambda\|_\infty v_{\lambda x}^2) dx$ , por lo tanto

$$\dot{w}_\lambda(t) \leq (-\lambda + \|u_\lambda\|_\infty) \int_0^1 v_{\lambda x}^2 dx, \quad (3.24)$$

Por otra parte, de la desigualdad (3.17) obtenemos

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Re^{-\lambda m^2 \pi^2 t}}{m^2 \pi^2}, \quad (3.25)$$

entonces en (3.25), para cada  $\lambda > 0$  existe un tiempo  $T_\lambda > 0$  suficientemente grande, tales que

$$\|u\|_\infty \leq \lambda \quad (\forall t \geq T_\lambda), \quad \text{uniformemente sobre conjuntos acotados en } X. \quad (3.26)$$

o equivalentemente tomando en cuenta la desigualdad (3.24), expresamos lo anterior sucintamente de la siguiente manera

$$(\forall \lambda > 0)(\exists T_\lambda > 0) \quad (\forall t \geq T_\lambda) \quad (\|u\|_\infty \leq \lambda) \quad \dot{w}_\lambda(t) \leq 0, \quad (3.27)$$

uniformemente sobre conjuntos acotados en  $X$ . Esto implica que que la solución  $F_\lambda^t(\varphi, \psi)$ , permanece acotada, para  $t \geq 0$ , tomando en cuenta además que la función  $w_\lambda(x, t)$  es de orden exponencial y que la función exponencial está acotada para  $0 \leq t \leq T_\lambda$ .

Considerando el subespacio:  $Y = \{ (0, \psi) \mid \psi \in \mathcal{H}_o \}$ , el sistema reducido es:  $u = 0$ ,  $v_t = \lambda v_{xx}$ .  $Y$  es invariante,  $M = \{(0, 0)\}$  es un  $\mathcal{B}'_Y$ -atractor. Aplicando el Corolario 3.4.1, resulta que para cada  $\lambda > 0$ ,  $M$  es  $\mathcal{B}$ -globalmente asintóticamente estable.

Para  $\lambda = 0$  la solución es inestable.

En este caso el sistema (3.6) queda

$$u_t = 0 \quad v_t = uv, \quad (0 < x < 1) \quad (\lambda > 0), \quad (3.28)$$

con condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad (t \geq 0) \quad (3.29)$$

y condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad v(x, 0) = \psi(x), \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (3.30)$$

con  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_o$ . Puesto que  $u_t(x, t) = 0$ , resulta  $u(x, t) = \varphi(x)$ . Entonces  $v_t(x, t) = \varphi(x)v(x, t)$ , de donde  $v(x, t) = \psi(x)e^{t\varphi(x)}$ . Por lo tanto el sistema semidinámico correspondiente a  $\lambda = 0$ , queda definido como

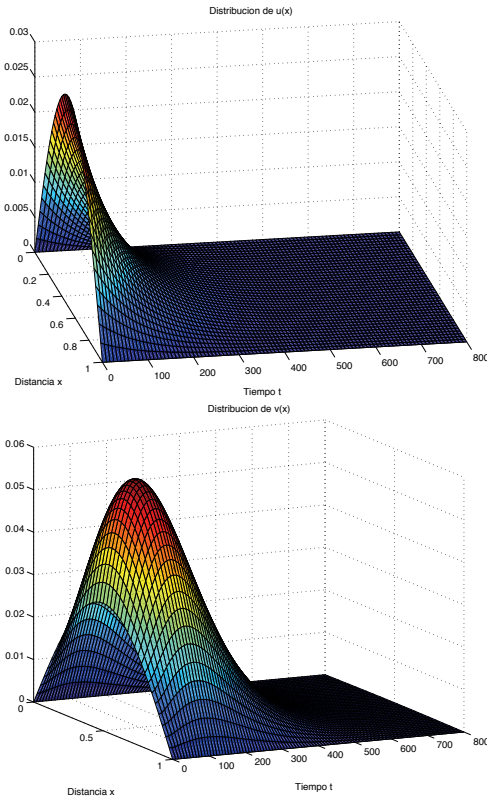
$$F_0^t(\varphi, \psi) := (\varphi(x), \psi(x)e^{t\varphi(x)}). \quad (3.31)$$

Finalmente, aplicando el Corolario 5.2.4, de [1]

para  $\lambda = 0$ , el conjunto  $M$  exhibe una *bifurcación crítica*, es decir  $M$  no es aislado de conjuntos invariantes. Además, para  $\lambda > 0$ ,  $M$

es aislado de conjuntos invariantes por ser atractor, aplicando esto y el principio de persistencia de la inestabilidad tenemos que  $M$  es un atractor no CRES; las órbitas se alargan en dirección del eje  $Y$ , (simbólicamente), ilustramos este fenómeno en la figura 3.2. El conjunto de puntos de bifurcación está dado por:

$$\{(\varphi, \psi) \mid \varphi = 0\} \cup \{(\varphi, \psi) \mid \psi = 0\}.$$



**Figure 3.2.** Ilustración de las soluciones  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$ , cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , la superficie del lado derecho se alarga hacia arriba y se contrae en el plano  $xu$ , esto es lo que se puede interpretar como familia de atractores no-CRES, ver también el ejemplo 7.





# Persistencia de la estabilidad asintótica y la bifurcación de Hopf generalizada

## 4.1. Principio de persistencia para la estabilidad asintótica

Bajo las mismas hipótesis ya establecidas para sistemas dinámicos y semidinámicos en un espacio métrico general,  $X$ , que satisfacen la condición LAC (capítulos 2, 3, [19] y [18]); se puede establecer el **principio de persistencia para la estabilidad asintótica** como sigue:

**TEOREMA 4.1.1.** *Suponga que cada elemento de la familia  $F_\lambda$  de sistemas semidinámicos es LAC sobre un conjunto acotado  $A$ , y que  $A$  es atraída uniformemente para  $\lambda = \lambda_0$  hacia un conjunto  $M$  con  $A \in \mathcal{V}_M$ . Entonces, para cualquier vecindad  $U \in \mathcal{V}_M$ , existe una vecindad  $N \in \mathcal{N}$  tal que para cada  $\lambda \in N$ ,  $U$  contiene un conjunto compacto  $\lambda$ -estable  $M_\lambda$  que atrae uniformemente al conjunto  $A$  para  $\lambda$ . Además los conjuntos más pequeños  $M_\lambda$  con esta propiedad, son los conjuntos límite  $L_\lambda(A)$ .*

La prueba (dada en [19]), está basada en un argumento de inducción y en la siguiente proposición. Para el caso de sistemas sobre espacios localmente compactos, existen otras pruebas, usando funciones de Lyapunov [14].

**PROPOSICIÓN 4.1.2.** [12] *Si  $F_\lambda$  es LAC sobre un conjunto acotado  $A$ ,  $L_\lambda^+$  es un conjunto no vacío, compacto,  $\lambda$ -positivamente invariante que atrae uniformemente al conjunto  $A$  para  $\lambda$ . En particular, si  $A$  es una vecindad de  $L_\lambda^+(A)$ , este conjunto es  $\lambda$ -estable.*

El teorema 4.1.1 implica, en un sentido, que la región de atracción no se puede colapsar repentinamente cuando el parámetro cruza el valor crítico  $\lambda_0$ ; y por otro lado,  $A$  puede “explotar”, como es el caso en la ecuación:  $\dot{x} = -x[(x-1)+\lambda]^2$ . Aquí, para  $\lambda = 0$ , la región de atracción del origen es  $(-\infty, 1)$ , y para  $\lambda > 0$  es todo  $\mathbb{R}$ .

## 4.2. Bifurcaciones de Hopf generalizadas

En lo que sigue, suponemos que existe un conjunto compacto  $M$ , que es invariante para todo  $\lambda$ . En el caso de sistemas semidinámicos, *invariacia* de  $X$  significa que ambos  $M$  y su complemento son positivamente invariantes.

El Teorema principal del cual todos los otros son consecuencia, es el que sigue:

**TEOREMA 4.2.1. [19]** *Supongamos que  $M$  atrae uniformemente a una vecindad  $A \in \mathcal{V}_M$  para  $\lambda = \lambda_0$ , con respecto a una familia de sistemas semidinámicos que son LAC sobre  $A$ . Si existe una sucesión de valores  $\lambda_n$  tales que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  y una sucesión de puntos  $x_n \in A$  tales que  $L_{x_n}^+(x_n) \cap M = \emptyset$ , entonces  $M$  exhibe una bifurcación extracrítica en  $\lambda_0$ , y los conjuntos  $M_\lambda$  de la Definición 2.4.1 existen para  $\lambda = \lambda_n$  y se pueden definir como:*

$$M_{\lambda_n} = L_{x_n}^+(x_n).$$

El último conjunto tiene todas las propiedades establecidas en la Proposición 4.1.2. Si el conjunto  $A$  es relativamente compacto, la propiedad LAC es redundante. El teorema cubre el caso de una transición de estabilidad asintótica a inestabilidad completa, tratada en [14].

Una generalización directa del teorema principal de [14] es la siguiente.

**TEOREMA 4.2.2. [19]** *Las hipótesis son las mismas del Teorema 4.2.1, excepto que la última se reemplaza por la condición que para una cierta sucesión de valores  $\lambda_n \in \Lambda$ , con  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ,  $M$  es un repulsor, entonces  $M$  exhibe una bifurcación en  $\lambda_0$ . En particular, ahí surgen conjuntos  $\lambda_n$ -atractores compactos positivamente invariantes que son ajenos de  $M$  y atraen al conjunto  $A$  para cada  $\lambda = \lambda_n$ , y los conjuntos  $M_{\lambda_n}$  se pueden escoger como*

$$M_{\lambda_n} = \overline{L_{\lambda_n}^+(A) \cap R_{\lambda_n}}$$

*Aquí  $R_{\lambda_n}$  son las regiones de  $\lambda_n$ -repulsión de  $M$ , y están contenidas en cualquier vecindad de  $M$  para  $\lambda_n$  suficientemente cercana a  $\lambda_0$ . Si los sistemas  $F_\lambda$  son dinámicos, los conjuntos  $M_{\lambda_n}$  son  $\lambda_n$ -estables y separan  $M$  del complemento de  $L_{\lambda_n}^+(A)$ .*

La cuestión de si la última parte del teorema también es válida para sistemas semidinámicos, permanece como un problema abierto.

## Bifurcaciones que surgen de conjuntos silla

En esta sección dentamos con el símbolo  $\mathcal{S}$ , el filtro de vecindades del conjunto  $S$ , con el cual de aquí en adelante denotaremos el conjunto silla.

### 5.1. Persistencia de la estructura de silla

Un caso interesante y de particular importancia en la teoría general de bifurcaciones que surgen de equilibrios y conjuntos invariantes inestables como la desarrollada en el capítulo 2, refinada en el capítulo 3, y en [21] (ver también [2]), es el caso de una bifurcación que surge de un punto de equilibrio silla (o “conjunto silla”). En este caso, tienen lugar ambos comportamientos de estabilidad asintótica e inestabilidad en ciertas subvariedades, mientras que para pequeñas perturbaciones surgen nuevos conjuntos silla de bifurcación. En un sentido, se puede hablar de “persistencia de la *estructura de silla*”, aún cuando la silla original se convierta en un atractor local.

Aquí el punto de partida es el Teorema 2.1 del capítulo 2, que vale aún sin la hipótesis de que el conjunto  $M$  sea aislado de conjuntos invariantes cerrados, en tal caso, la conclusión del teorema podría ser que  $M$  exhibe una bifurcación en  $\lambda_0$ , la cual puede ser extracrítica o (posiblemente débilmente) crítica. En el contexto de nuestra teoría general, la generalización de la bifurcación de Hopf consiste en quitar la hipótesis de que  $M$  sea un atractor (o repulsor) mientras se preserva la suposición que  $M$  es aislado de otros conjuntos invariantes, y esta nos da los conjuntos silla.

En vista de lo anterior, la forma más conveniente de definir un conjunto silla para nuestro propósito; es:

DEFINICIÓN 5.1.1. Un suconjunto  $S \subset X$  se llama *conjunto silla* si:

$$(\exists U \in \mathcal{S})(\forall V \in \mathcal{S})(\exists x \in V) \quad \gamma^+(x) \not\subset \bar{U} \quad x \in \gamma^+(\mathcal{C}\bar{U}). \quad (5.1)$$

DEFINICIÓN 5.1.2. Un subconjunto  $S \subset X$  se llama *aislado de conjuntos invariantes* si:

$$(\exists U \in \mathcal{F})(\forall M' \text{ invariante} : M' \subset U) \Rightarrow M' \subset S$$

PROPOSICIÓN 5.1.3. [1] Sea  $S \subset X$  un conjunto compacto e invariante. Supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (i)  $F$  es LAC sobre  $W \in \mathcal{F}$ ;
- (ii)  $(\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F}) \quad V \subset U, \quad V \setminus S$  es conexo;
- (iii)  $S$  es aislado de conjuntos invariantes;
- (iv)  $S$  no es atractor; y
- (v)  $(\exists U \in \mathcal{F})(\forall V \in \mathcal{F})(\exists x \in V) \quad x \in \gamma^+(\mathcal{C}\bar{U})$ .

Entonces  $S$  es un conjunto silla.

LEMA 5.1.4. [1] Sea  $(X, T, F, \Lambda)$  una familia de sistemas dinámicos,  $X$  un espacio métrico localmente compacto,  $M \subset X$  invariante y compacto  $\forall \lambda \in \Lambda$ . Además supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (i)  $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}$ ;
- (ii)  $\exists(U, V, W) \quad (W \in \mathcal{V}_M)(V \in \mathcal{V}_{\bar{W}})(U \in \mathcal{V}_{\bar{V}})$ ; y
- (iii)  $M$  es  $\lambda_0$ -aislado de conjuntos invariantes con respecto a  $U$ ;

Entonces  $(\exists N \in \mathcal{N})(\forall \lambda \in N) \quad (\exists M_\lambda' \quad \lambda - \text{invariante} \quad M_\lambda' \subset \bar{V} \setminus W)$ .

TEOREMA 5.1.5. [1] Sea  $(X, T, F, \Lambda)$  una familia de sistemas semi-dinámicos,  $X$  un espacio métrico localmente arco-conexo,  $M \subset X$  invariante y compacto  $\forall \lambda \in \Lambda$ . Además supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- (i)  $F_\Lambda$  es LAC en  $\lambda_0$  sobre  $W \in \mathcal{V}_M$ ;
- (ii)  $M$  es  $\lambda_0$ -inestable;
- (iii)  $(\exists x \notin M)(L^+(x) \neq \emptyset)(L^+(x) \subset M)$ ;
- (iv)  $M$  es  $\lambda_0$ -aislado de conjuntos invariantes con respecto; y
- (v)  $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad B_\epsilon(M) \setminus B_\delta^*(M)$  es conexo.

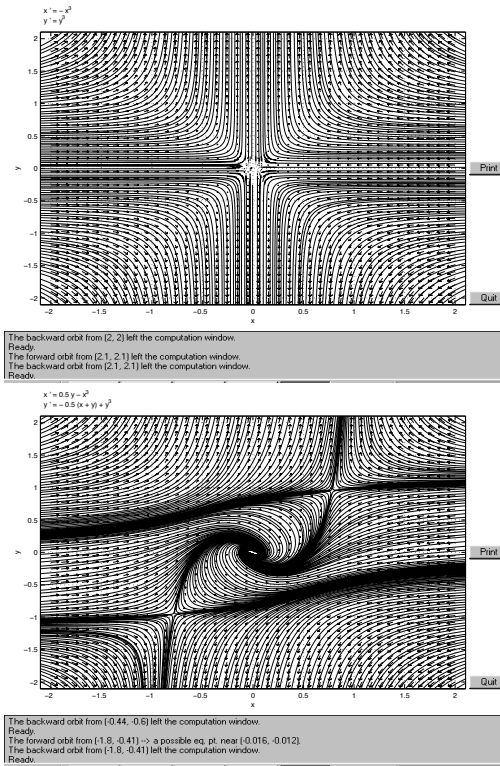
Entonces se separan de  $M$  conjuntos sillas.

En los ejemplos que siguen presentamos tres casos prototipo en el plano que nos ilustran el contenido del Teorema 5.1.5.

EJEMPLO 10. Sea la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del parámetro  $\lambda \geq 0$ ,

$$\dot{x} = \lambda y - x^3, \quad \dot{y} = -\lambda(x + y) + y^3. \quad (5.2)$$

El espacio fase es  $\mathbb{R}^2$ , el espacio de parámetros  $\Lambda$  es  $\mathbb{R}^+$  y  $M = \{(0, 0)\}$ . Para  $\lambda = 0$ ,  $M$  es un conjunto silla y, para  $\lambda > 0$   $M$  es un foco estable. Los puntos que se bifurcan son conjuntos silla. Ver la figura 5.1.



**Figure 5.1.** Arriba, para  $\lambda = 0$ ,  $M$  es un conjunto silla. Abajo, para  $\lambda = 0.5$ ,  $M$  es un foco estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.

EJEMPLO 11. Consideremos la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales que contienen el parámetro  $\lambda$ ,

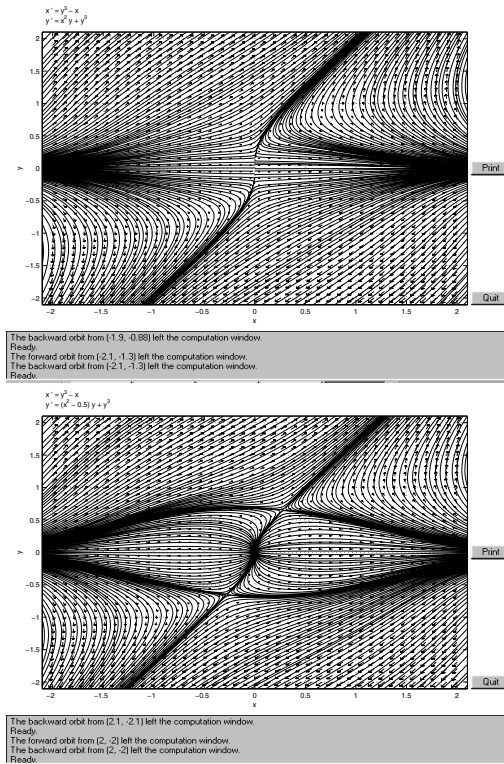
$$\dot{x} = y^3 - x, \quad \dot{y} = (x^2 - \lambda)y + y^3. \tag{5.3}$$

El espacio fase es  $\mathbb{R}^2$ , el espacio de parámetros  $\Lambda$  es  $\mathbb{R}^+$  y  $M = \{(0, 0)\}$ . Para  $\lambda = 0$ ,  $M$  es un conjunto silla y, para  $\lambda > 0$   $M$  es un nodo estable. Los puntos que se bifurcan son puntos silla. Ver la figura 5.2.

EJEMPLO 12. Para la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen del parámetro  $\lambda \geq 0$ ,

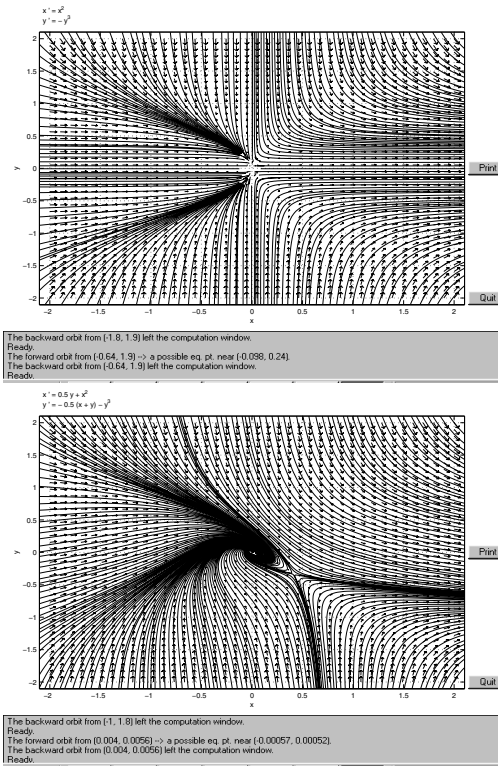
$$\dot{x} = \lambda y + x^2, \quad \dot{y} = -\lambda(x + y) - y^3. \tag{5.4}$$

El espacio fase es  $\mathbb{R}^2$ , el espacio de parámetros  $\Lambda$  es  $\mathbb{R}^+$  y  $M = \{(0, 0)\}$ . Para  $\lambda = 0$   $M$  es un conjunto silla degenerada y, para  $\lambda > 0$   $M$  es un



**Figure 5.2.** Arriba, para  $\lambda = 0$ ,  $M$  es un conjunto silla. Abajo, para  $\lambda = 0.5$ ,  $M$  es un nodo estable. Los puntos de bifurcación son puntos silla.

nodo estable y el punto que se bifurca es un punto silla. Ver la figura 5.3.



**Figure 5.3.** Arriba, para  $\lambda = 0$ ,  $M$  es un conjunto silla degenerada (fusión nodo-silla). Abajo, para  $\lambda = 0.5$ ,  $M$  es un foco estable. El punto que se bifurca es un punto silla.





# A

Apéndice

## Notaciones y algunos conceptos fundamentales.

Una bola con centro en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y radio  $\epsilon$ , la denotamos con  $B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones dadas. Decimos que

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

si existe  $\delta > 0$  y existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M |g(x)|$  para toda  $x$  tales que  $|x| < \delta$ . Decimos que

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

si para toda  $\epsilon > 0$  y existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x)| \leq \epsilon |g(x)|$  para toda  $x$  tales que  $|x| < \delta$ .

Introducimos las siguientes notaciones: Sean  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{+n}$  con norma  $|\mathbf{i}|$  y producto  $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$  como sigue

$$\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$|\mathbf{i}| := i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{i}} := x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tiene  $|\mathbf{i}|$  derivadas, escribimos

$$D_{\mathbf{i}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\mathbf{i}|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} f(\mathbf{x})$$

**TEOREMA A.0.6.** (Teorema de Taylor) Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^{m+1}$  con  $\Omega$  un conjunto abierto que contiene un segmento de recta que incluye los puntos desde  $\mathbf{a}$  hasta  $\mathbf{x}$ , entonces existe un punto  $\xi$  en este segmento tal que

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{i}| \leq m} \frac{1}{|\mathbf{i}|!} D_{\mathbf{i}}f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{i}} + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\mathbf{i}|=m+1} D_{\mathbf{i}}f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{i}}.$$

**TEOREMA A.0.7** (Teorema de la función inversa). Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) := (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$$

donde  $U$  es un conjunto abierto, y  $\mathbf{F}$  de clase  $C^1$  en una vecindad de un punto  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Además supongamos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

es no singular. Entonces existen  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que  $\mathbf{F} : B_\delta(\mathbf{x}_0) \rightarrow B_\epsilon(\mathbf{p}_0)$  es uno-a-uno y sobre; es decir, para todo  $\mathbf{p} \in B_\epsilon(\mathbf{p}_0)$  existe una única solución  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ , tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}.$$

**TEOREMA A.0.8** (Teorema de la función implícita). Sea  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &:= (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

donde  $\Omega$  es un conjunto abierto, y  $\mathbf{F}$  de clase  $C^1$  en una vecindad de un punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ . Además supongamos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0},$$

y que la matriz de  $p \times p$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p}((\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) \end{pmatrix}$$

es no singular. Entonces existen  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^q$  y existe una función  $\mathbf{f} : B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0,$$

y para todo  $\mathbf{x} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

## Referencias

- [1] L. Aguirre. Persistencia en sistemas dinámicos y problemas de bifurcaciones, Tesis Doctoral, UAM-I, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, 18 de Marzo, 2003.
- [2] L. Aguirre and P. Seibert. Bifurcation from unstable equilibria, *Aport. Mat.*, XXVII Congr. Nac. Soc. Mat. Mex., Ser. Com. **16**, (1995), 165--171.
- [3] L. Aguirre and P. Seibert. Types of change of stability and corresponding types of Bifurcations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **5**, (4), (1999), 741--752.
- [4] N.P. Bhatia and O. Hajek. Local Semi-Dynamical Systems. **90**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969. *Bifurcation and total stability*, *Rend. Sem. Mat., U. di Padova* **71** (1984), 131-139.
- [5] N.P. Bhatia and G.P. Szego. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Grundlehren d. math. Wiss. **161**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg--New York, 1970.
- [6] J. S. Florio. On topological content of stability, instability and persistence. *Universitatis iagellonicae acta mathematica*, fasciculus XXXVI, (1997), 89--95.
- [7] J.K. Hale, "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems", *Math. Surveys Monographs*, Vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [8] J. Hale and Koçak *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, Inc, (1991).
- [9] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Ber. Math.Phys. Sächsische Akad. wiss. Leipzig* **94**, 1--22 (1942).
- [10] D.W. Jordan and P. Smith *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction to dynamical systems*, Oxford University Press Third edition, (1999), New York.
- [11] Y. A. Kuznetsov *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, Inc, (1995).
- [12] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semigroups and evolution equations*, *Accad. Naz. lincei*. Cambridge University Press (1991).
- [13] F. Marchetti. Some stability problems from a topological viewpoint. *Rc. Acad. Naz. Lincei Sci. fis. mat.* **60** (6), 733--742(1976).
- [14] F. Marchetti, P. Negrini, L. Salvadori and M. Scialia. Liapunov direct method in approaching bifurcation problems. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **108**, (1976), 211--226.
- [15] J. Marsden and M.F. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer, New York, (1976).
- [16] S.H. Saperstone. *Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [17] P.Seibert, J.H. Arredondo, J. Delgado y L. Aguirre. Reduction theorems for uniform stability of systems in general spaces. *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), 1997, 69-88.
- [18] P. Seibert. Stability under perturbations in generalized dynamical systems. *Int. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York 1963, pp. 463--473.
- [19] P. Seibert and J.S. Florio. On the foundations of bifurcation theory. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applic.* **8** **22**, (1994), 927--944.

- [20] P. Seibert and J. S. Florio. On the reduction to a subspace of stability properties of systems in metric spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **169** (1995) 291-- 320.
- [21] P. Seibert and J. S. Florio. On bifurcations arising from unstable equilibria and invariant sets. *J. Differential Equations* **150** (1998), no. 2, 250--263.
- [22] S. Wiggins Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Texts in Applied Mathematics **2** Springer--Verlag, Berlin (1990).
- [23] T. Yoshizawa. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Japanese Mathematical Society* Tokyo (1963).